



BIBLIOTECA FILOSÒFICA

Filosofia, Psicologia, Història de la Filosofia

dirigida per

PERE COROMINES

Membre de la Secció de Ciències

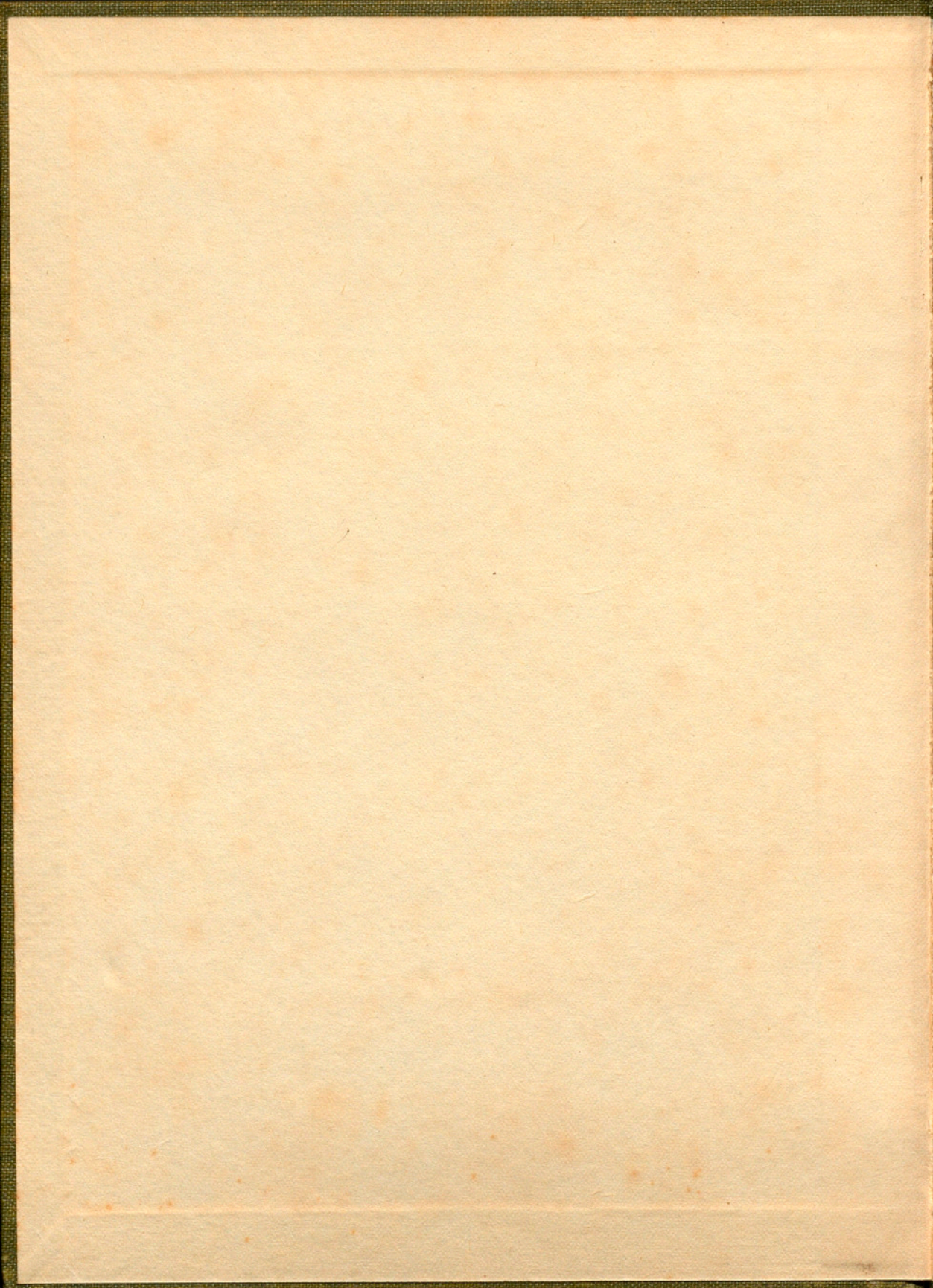
INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

II

PER

DAVID GARCIA

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS



BIBLIOTECA FILOSÒFICA

FILOSOFIA, PSICOLOGIA
HISTÒRIA DE LA FILOSOFIA

DIRIGIDA PER

PERE COROMINAS

MEMBRE DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES

VOLUM IV

PUBLICACIÓ DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES

INTRODUCCIÓ
A LA
LOGÍSTICA

AMB APLICACIONS A LA FILOSOFIA
I A LES MATEMÀTIQUES

PER

DAVID GARCIA

II

BARCELONA
INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS
PALAU DE LA GENERALITAT
MCMXXXIV

PART TERCERA
LÒGICA RELACIONAL

§ 31

Definicions preliminars

I. DEFINICIÓ DE RELACIÓ. — Considerem les funcions prop.: « x és igual a y »; « x gira entorn de y »; « x és menor que y »; « x és fill de y »; « x és doble que y », etc., en les quals cal determinar dos valors independents per a x , y , si volem arribar a una prop. veritable o falsa. Anomenem *relacions biargumentals* aquestes funcions de dues variables. N'hi ha d'altres amb més arguments: v. gr., « x deu a y la quantitat z »..... Les relacions s'escriuran $\varphi(\hat{x}, \hat{y})$, $\psi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ si volem significar la mateixa relació o funció biargumental o triargumental, etc. Qualsevol funció $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y, z)$ determina una *classe de parells d'elements* o de *triades d'elements*.... en lloc d'individus aïllats, determinats per les funcions uniargumentals. La classe d'aquests parells s'anomena *extensió* de la relació considerada, i escriurem $\hat{x} \hat{y} \varphi(x, y)$ per aplegar tots els parells per als quals la funció dona una prop. V . Distingirem, doncs, entre $(x)(y) \varphi(x, y)$, que, en general, és una prop. F , i $\hat{x} \hat{y} \varphi(x, y)$, que és sempre veritable; i direm que els elements a , b són un parell de l'extensió considerada pròpia de la funció, si $\varphi(a, b)$ és una prop. veritable; això és:

Def. 31.01 $a \{ \hat{x} \hat{y} \varphi(x, y) \} b = \varphi(a, b)$. I notem que, en general, $\varphi(x, y)$ és diferent de $\varphi(y, x)$ (vegeu exemples adduïts); i, per tant, l'ordre entre a , b , no és indiferent. Fem, doncs, la convenció indicada en la definició anterior, respecte a la substitució de x per a , i de y per b ; la qual cosa completem amb

$b \{ \hat{x} \hat{y} \varphi(x, y) \} a = \varphi(b, a)$, prop. diferent de l'anterior; i, naturalment, són diferents

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

$$a \{ \hat{x} \hat{y} \varphi (y, x) \} b = \varphi (b, a).$$

$$b \{ \hat{x} \hat{y} \varphi (y, x) \} a = \varphi (a, b).$$

Amb aquestes definicions hem menat el càlcul de les relacions al proposicional i al de les classes, de manera que no caldrà afegir cap nou axioma ni regla: ens acontentarem, doncs, amb la transcripció dels teoremes més importants; car, ultra la raó adduïda, una demostració de tots els teoremes emprats, que són sempre els més importants des del punt de vista conceptual, demanaria demostrar-ne moltíssims d'altres amb caràcter purament de mitjans, la qual cosa entrebancaria massa una introducció.

La construcció de la lògica relacional és, fins a cert punt, semblant a la de la lògica conjuntual, com ho palesaran les definicions i els teoremes següents.

Relacions generals seran indicades amb P, Q, R, S, T, W, Z ; relacions especials, amb signes determinats, v. gr., $< (x, y)$, relació de «menor que», $2 (x, y)$ relació de «doble que»; i d'altres que anirem introduint.

Una proposició d'origen relacional serà designada freqüentment amb xPy ; « x té amb y la relació P »; x s'anomena l'antecedent; y , el conseqüent, respecte a la relació P . Suposarem, per tal d'estalviar parèntesis, que $P, Q, R, \dots$ uneixen x, y , més que qualsevol altra unió lògica; així, $(xPy \vee xRy)$ equivaldrà a $(xPy) \vee (xRy)$, etc.

Existeixen relacions individuals, això és, aplicables únicament a individus: « x és fill de y », « $2 < 4$ »..... Hi ha, però, altres conceptes que són propietats de relacions, v. gr., asimètric, simètric, intransitiu. Per exemple, «La relació *fill de* y és asimètrica i intransitiva». «A la relació *doble* convé el predicat d'intransitiva». Aquests predicats de segona categoria seran estudiats més endavant. Tenen, doncs, un perfecte sentit les expressions $(R) \varphi (R)$, $(ER) \varphi (R)$, $\Phi [\varphi (R)]$, $\hat{R} \varphi (R)$ $(R) \varphi (R)$ significa: «Totes les relacions R posseeixen la propietat φ ». $\hat{R} \varphi (R)$ considera només aquelles relacions que posseeixen la propietat φ . I $\hat{\beta} \varphi (\alpha, \beta)$ és una relació entre classes, v. gr., la d'igualtat quant al nombre d'elements, o coordinabilitat biunívoca. $\hat{P} \hat{Q} \varphi (P, Q)$ és una relació entre relacions,

LÒGICA RELACIONAL

per exemple, la d'igualtat quant al nombre de parells d'elements que satisfan cadascuna de les relacions en particular. Segons la definició general, significa:

$(a, b) \{ \hat{P} \hat{Q} \psi(P, Q) \} (c, d) = \psi[(a, b), (c, d)]$: una prop determinada.

Segons la teoria de l'extensionalitat, podem escriure:

$$31.02 \quad [\varphi(x, y) \equiv_{x, y} (x, y)] \equiv [\hat{x} \hat{y} \varphi(x, y) = \hat{x} \hat{y} \psi(x, y)].$$

Si dues relacions són satisfetes pels mateixos valors d'elements, presos en parells, les funcions prop. corresponents són equivalents quant a valors lògics (signe $\equiv$), encara que conceptual-psicològicament parlant siguin diferents; la qual cosa ens permetrà de substituir-les mútuament. 31.02 s'escriu també més clarament:

$$31.021 \quad (R = S) \equiv [(x R y) \equiv_{x, y} (x S y)].$$

Ara podem donar una definició general de relació (*Rel*):

$$31.022 \quad \text{Def. } Rel = \hat{R} [(E \varphi) \& R = \hat{x} \hat{y} \varphi!(x, y)].$$

Si existeix una funció elemental $\varphi(x, y)$, el conjunt de tots els parells que la satisfan és una entitat (lògica) R , i la classe de totes aquestes classes és la relació en general.

31.023 Def. $(R) f(R) = (\varphi) f[\hat{x} \hat{y} \varphi!(x, y)]$; que totes les relacions R posseeixen la propietat f , vol dir que aquesta propietat és propietat de tots els parells $\hat{x}, \hat{y}$, que satisfan qualsevol predicat individual φ .

$$31.024 \quad \text{Def. } (E R) f(R) = (E \varphi) f[\hat{x} \hat{y} \varphi(x, y)].$$

$(\iota R) (\varphi R)$ significarà «l'única relació R que satisfà φ »; o l'única relació R que posseeix la propietat φ ; i tindrem,

$$31.025 \quad \text{Def. } (\iota R) (\varphi R) f(\iota R) (\varphi R) = \\ = (E S) \{ \varphi R \equiv_R (R = S) \} \& f S.$$

Valen les mateixes consideracions que en 27.02, 03.

$$31.026 \quad \text{Def. } P \{ \varphi!(\hat{R}, \hat{S}) \} Q = \varphi!(P, Q).$$

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

$$\begin{aligned} 31.110 \quad & \vdash (x) (y) [\psi (x, y) \equiv \chi (x, y)] \rightarrow \\ & \rightarrow [f [\hat{x} \hat{y} \psi (x, y)] \equiv f [\hat{x} \hat{y} \chi (x, y)]]. \end{aligned}$$

Les propietats de les relacions són de tipus extensional.

$$31.120 \quad \vdash (x) (y) [\psi (x, y) \equiv \chi (x, y)] \equiv [\hat{x} \hat{y} \psi (x, y) \equiv \hat{x} \hat{y} \chi (x, y)].$$

$$31.130 \quad \vdash (E R) f (R) \equiv \overline{R} \overline{f} (R).$$

31.140 $\vdash (R) f (R) \rightarrow f (S)$. Aquestes darreres fórmules són correlatives amb les fórmules ben conegudes del càlcul funcional. La primera vol dir que: «Si existeix una relació R que posseeix la propietat f , això equival a l'afirmació que no a totes les relacions convé la negació de f ». La segona és l'axioma $(x) F (x) \rightarrow F (y)$ aplicat a la teoria de les relacions: «Si totes les relacions posseeixen la propietat f , es dedueix que la tindrà una relació qualsevol S ».

$$31.150 \quad \vdash (R) (S) f (R, S) \equiv (S) (R) f (R, S).$$

$$31.160 \quad \vdash (R) f (R) \& (R) g (R) \rightarrow f (S) \& g (S).$$

$$31.170 \quad \vdash (R = S) \equiv (g) [g! (R) \rightarrow g! (S)].$$

II. OPERACIONS RELACIONALS.

31.03 Def. $R \subseteq S = (x) (y) [x R y \rightarrow x S y]$. Operació-subsumpció: la relació R es troba inclosa en la S si tots els parells x, y , que satisfan R satisfan igualment S . Si R és, per exemple, la relació «doble que», i S la de «menor que», tots els parells x, y , que satisfan la primera, satisfan la segona.

31.04 Def. $R \dot{\cap} S = \hat{x} \hat{y} [x R y \& x S y]$. Operació-comunicació: comprèn tots els parells x, y , que satisfan alhora ambdues relacions. Si, v. gr., R és la relació « x és professor de y » i S la de « x és amic de y », $R \dot{\cap} S$ enclou tots els x que són alhora professors i amics dels y .

31.05 Def. $R \cup S = \hat{x} \hat{y} [x R y \vee x S y]$. Operació-reunió: aplega tots els parells (molt més nombrosos que els anteriors) que satisfan almenys una de les dues relacions.

31.06 Def. $\div R = \hat{x} \hat{y} (x \overline{R} y)$. L'operació-negació aplega tots els parells x, y , que no compleixen la relació R . Si R és la relació $<$, $\div R$ comprèn tots els parells de nombres naturals en els quals el nombre antecedent és major o igual que el conseqüent.

LÒGICA RELACIONAL

31.07 Def. $R \dot{-} S = R \dot{\cap} \dot{-} S$. Operació-complementaritat, que aplega tots els parells de R que no satisfan S . Si R, S són les relacions $<$, doble que, $R \dot{-} S$ comprèn tots els parells de nombres naturals que tenen un antecedent que no és doble que el conseqüent.

III. REPRESENTACIONS GRÀFIQUES. — Hi ha tres mètodes de representar gràficament les relacions, molt aprofitables i aclaridors, si el nombre dels parells és finit: a) llista dels parells, b) esquema vectorial, c) esquemes matricials.

Una relació resta totalment definida si tenim tots els parells que formen la seva extensió, donats amb l'ordre propi per a fer vàlida la funció prop. corresponent, puix que les relacions només són classes biargumentals, i ens trobem en logística extensional. Sigui, per exemple, D la relació « x és deixeble de y », i considerem dins una universitat un curs determinat. Si són A, B, C, F els professors, i $a, b, c, d, e, f, \dots, a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots$, els deixebles, la relació dita resta definida escrivint tots els parells de prop. veritables del tipus $aDA, aDB, aDC, \dots$ (suposant que a és deixeble de A, B, C, F), etc.

La representació vectorial empra punts i fletxes o vectors que surten d'ells, unint els punts relacionats amb la relació especial considerada. Això pressuposa que pel mètode anterior coneixem els parells ordenats. Sigui G la relació definida pels parells $aGb, aGc, aGd, aGe, bGf, eGg, eGh, gGi, gGk, gGl$, l'esquema vectorial serà el de la fig. 3:

L'esquema tradueix, per exemple, una relació de descendència dins una família determinada, tot començant en un predecessor fix. Els vectors simbolitzen la relació « x és pare de y ».

El tercer mètode de simbolització és el matricial. Emprem un esquema amb dues coordenades; en ambdues escriurem tots els elements deslligats. En el lloc d'intersecció escriurem un signe especial, v. gr. $\vee$, si entre els elements corresponents existeix la relació considerada; i no escriurem res, si no



Fig. 3

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

existeix. L'esquema matricial de la relació considerada darrerament és:

R		a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
a			v	v	v	v						
b							v					
c												
d												
e								v	v			
f												
g											v	v

Fig. 4

La diagonal principal enclou els parells aa , bb , cc Els llocs que es troben simètrics a la diagonal principal s'anomenen conjugats. Comprenen els parells ab , ba , ac , ca si existeixen en la relació considerada.

Representem una altra relació H , definida,

a) llista de parells: aa , ab , ba , bc , dc , eb .

b) esquema vectorial.

Notem els vectors circulars, que representen la relació que un element té amb ell mateix (v. gr., la relació d'igualtat), els vectors dobles (relacions directes amb inverses) i vectors unidireccionals. De tots anirem parlant.

c) Esquema matricial:

R		a	b	c	d	e
a		v	v			
b		v		v		
c						
d				v		
e			v			

Fig. 6

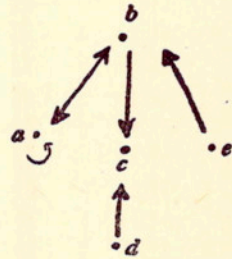


Fig. 5

Convé de fixar una de les dues direccions com a corresponent als elements de la variable independent: antecedents. L'altra, per tant, restarà per als conseqüents. Suposarem que la vertical és la dels antecedents.

Amb els tres mètodes podem representar les operacions relacionals definides. $R \subset S$ demanarà que tots els parells de la llista de R es trobin en la de S . La llista de $R \cap S$ només aplegarà

LÒGICA RELACIONAL

els parells repetits en les de R , S , i amb ells podrem fer una llista nova i representar-la vectorialment o amb matriu. La llista de $R \cup S$ aplegarà tots els parells d'ambdues llistes, traient només les repeticions. La llista de $\dot{-} R$ enclourà tots els parells que faltin en la de R ; i, per últim, la de $R \dot{-} S$ aplegarà tots els parells de R , després d'haver tret els de S . Siguin dues relacions M , N definides: $M(a a, a b, a c, b a, b d)$; $N(a b, b c, c d, c c)$; no existeix ni $M \subset N$, ni $N \subset M$: $M \cap N = (a b)$; $M \cup N = (a a, a b, a c, b a, b c, b d, c c, c d)$; $M \dot{-} N = (a a, a c, b a, b d)$; $\dot{-} M = (a d, b b, b c, c a, c b, c c, c d, d a, d b, d c, d d)$ suposant que el tipus complet aplega totes les combinacions binàries amb repetició, respecte als elements a, b, c, d .

IV. TEOREMES MÉS IMPORTANTS. — Són correlatius amb els de la lògica conjuntual. Enumerem els següents:

- 31.11 $\vdash [R \subset S \ \& \ S \subset R] \equiv (x) (y) [x R y \equiv x S y]$.
- 31.111 $\vdash [R \subset S \ \& \ S \subset R] \equiv (R = S)$.
- 31.12 $\vdash R \subset S \ \& \ S \subset T \rightarrow R \subset T$.
- 31.13 $\vdash R \subset S \ \& \ x R y \rightarrow x S y$.
- 31.14 $\vdash R \subset S \rightarrow [R \cap T \subset S \cap T]$.
- 31.15 $\vdash (R = S) \rightarrow [R \cap T = S \cap T]$.
- 31.16 $\vdash (R = S) \rightarrow [T \subset R \equiv S \subset T]$.
- 31.17 $\vdash (R = S) \rightarrow [T \subset R \equiv T \subset S]$.
- 31.18 $\vdash R \cap R = R$.
- 31.19 $\vdash R \cap S = S \cap R$.
- 31.20 $\vdash (R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$.
- 31.21 $\vdash R \cup R = R$.
- 31.22 $\vdash R \cup S = S \cup R$.
- 31.23 $\vdash R \cup [R \cap S] = R$.
- 31.24 $\vdash R \cap [R \cup R] = R$.
- 31.25 $\vdash (R \cap S) \cup (R \cap T) = R \cap (S \cup T)$.
- 31.26 $\vdash (R \cup S) \cap (R \cup T) = R \cup (S \cap T)$.
- 31.27 $\vdash (P \subset R) \ \& \ (Q \subset S) \rightarrow [(P \cup Q) \subset (R \cup S)]$.
- 31.28 $\vdash \dot{-} (\dot{-} R) = R$.
- 31.29 $\vdash R \subset S \equiv \dot{-} S \subset \dot{-} R$.
- 31.30 $\vdash R \subset \dot{-} S \equiv S \subset \dot{-} R$.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

- 31.31** $\vdash (R = S) \equiv (\dot{\vdash} R = \dot{\vdash} S).$
31.32 $\vdash \dot{\vdash} (R \dot{\cap} S) = \dot{\vdash} R \cup \dot{\vdash} S.$
31.33 $\vdash R \dot{\cap} S = \dot{\vdash} (\dot{\vdash} R \cup \dot{\vdash} S).$
31.34 $\vdash (x, y) x (R \cup \dot{\vdash} R) y.$
31.35 $\vdash (x, y) \{ \overline{x (R \dot{\vdash} R) y} \}.$
31.36 $\vdash (R) f(R) \equiv (R) f(\dot{\vdash} R).$
31.37 $\vdash (E R) f(R) \equiv (E R) f(\dot{\vdash} R).$

V. RELACIÓ UNIVERSAL I NUL·LA. EXISTÈNCIA DE RELACIONS.

— Les definicions i teoremes són ampliació dels corresponents de la teoria de les classes:

Def. **31.08** $\dot{\vee} = \hat{x} \hat{y} \{ (x = x) \ \& \ (y = y) \}.$

Def. **31.081** $\dot{\wedge} = \dot{\vdash} \dot{\vee}.$

Def. **31.09** $\dot{E} R = (E x, y) (x R y).$

31.40 $\vdash (x) (y) \varphi(x, y) \equiv [\hat{x} \hat{y} \varphi(x, y) = \dot{\vee}].$

31.41 $\vdash R \dot{\cap} \dot{\vdash} R = \dot{\wedge}.$

31.42 $\vdash R \cup \dot{\vdash} R = \dot{\vee}.$

31.43 $\vdash R \dot{\cap} \dot{\vee} = R.$

31.44 $\vdash R \cup \dot{\wedge} = R.$

31.45 $\vdash R \cup \dot{\vee} = \dot{\vee}.$

31.46 $\vdash R \subset S \equiv [R \dot{\vdash} S = \dot{\wedge}].$

31.47 $\vdash R \subset S \rightarrow [E! R \rightarrow E! S].$

I d'altres que es formulen fàcilment, esguardant els teoremes de la lògica conjuntual.

Per a completar el parallelisme, quatre definicions més:

Def. **31.010** $\dot{p}' \lambda = \hat{x} \hat{y} \{ (R) [R \varepsilon \lambda \rightarrow x R y] \}.$

Def. **31.011** $\dot{s}' \lambda = \hat{x} \hat{y} \{ (E R) \ \& \ R \varepsilon \lambda \ \& \ x R y \}.$

Si λ és una classe de classes biargumentals, és a dir, si els elements de λ són relacions $P, Q, R, S, \dots$, s'anomena producte relacional $P \dot{\cap} Q \dot{\cap} R \dot{\cap} S \dot{\cap} \dots$, una *nova relació* que només aplega els parells x, y , que satisfan alhora totes les relacions. Aquesta relació és designada amb $\dot{p}' \lambda$. La suma $P \cup Q \cup S \cup R \cup \dots$

LÒGICA RELACIONAL

és una nova relació $\hat{s}'\lambda$, que es satisfà amb qualsevol dels parells que compleixin almenys una de les relacions elementals.

Def. 31.012 $Rl = \hat{\lambda} \hat{R} \{ \lambda = \hat{R} (R \subset P) \}$.

Def. 31.013 $Rl \text{ ex} = \hat{\lambda} \hat{R} \{ \lambda = \hat{R} (R \subset P \ \& \ E! R) \}$.

La primera defineix la classe o conjunt de totes les relacions parcials existents incloses en la relació total P , comptant-hi la relació nulla; la segona, excloent-la.

§ 32

Generalització de la teoria dels tipus lògics

Amb la introducció de funcions amb dues o més variables independents se'ns imposa una nova tasca: la classificació dels tipus relacionals, molt més complicada que la de les funcions uniarmentals.

Hem de considerar ara el tipus dels antecedents i el dels conseqüents, que, en el cas més elemental, seran individus, tipus $t(0)$ o bé classes $t(1)$, $t(2)$,.....; i, d'altra banda, per a classificar els tipus de les relacions de relacions caldrà parlar esment en quatre variables.

Suposem, doncs, que el tipus dels antecedents és $t(m)$ i el dels conseqüents $t(n)$; aleshores direm que la relació és del tipus $t(m, n)$. Aquí resten compresos els tipus $t(0, 0)$ (tipus d'una relació entre individus, v. gr., les de menor que, fill de, doble que, amic de.....); $t(01)$, tipus d'una relació entre individus i classes de primer ordre, v. gr., la relació ϵ , la de ciutadà de.....; $t(02)$, tipus d'una relació entre individus i una classe de segon ordre, v. gr., la de membre del Consell directiu d'una societat de societats.....; $t(10)$, és el tipus d'una relació entre una classe i els individus; $t(11)$, $t(12)$, $t(21)$,.....

Suposem ara que els membres d'una relació són també relacions (relacions de tipus inferior a la considerada, com direm). Eixamplem la regla anterior.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Prenguem tots els tipus totals de les relacions considerades com a noves unitats, que designarem, v. gr., $t(mn)$ amb $t\xi$, $t(qp)$ amb $t\eta$; direm que la relació total serà del tipus $t[\xi\eta]$. Per exemple, si els antecedents d'una relació són del tipus $t(0)$, això és, individus, i el tipus dels conseqüents són relacions del tipus $t(02)$, el tipus total serà $t[0(02)]$. Si els tipus inicials són $t(11)$, $t(22)$, el tipus total serà $t[(11)(22)]$.

Una relació entre relacions és, per exemple, la d'«igualtat estructural» entre les relacions — doble que i pare de — que són ambdues, com veurem, asimètriques, intransitives. La relació $\mathbb{C}$ «inclusió entre dues relacions», és del tipus $t[(00)(00)]$. Exemple, la relació d'inclusió entre les relacions major que i doble que. La relació d'inclusió entre la classe dels fills i la classe dels pares és del tipus $t[(01)(11)]$. En canvi, la relació total d'inclusió entre dues relacions, «la primera, d'inclusió entre la classe dels fills i la dels pares, i la segona, d'inclusió entre la classe dels deixebles i la dels mestres», és del tipus total $t[(11)(11)]$, etc. Les relacions $\dot{\vee}$, $\dot{\wedge}$ són del tipus $t(00)$; ϵ del tipus $t(01)$; $\mathbb{C}$ del tipus $t(11)$

Suposem ara que els elements d'una classe tinguin el tipus $t\xi$; la classe tindrà el tipus superior $t(\xi)$. Quan tractem d'elements individuals i classes corresponents a funcions uniargumentals, això ja no ens diu res de nou: és el pas de $t(0)$ a $t(1)$, de $t(1)$ a $t(2)$ d'individus a classe individual, de classes individuals a classes de classes, etc. Suposem, però, que els elements inicials són relacions d'un tipus ja determinat, v. gr., $t(00)$, $t(10)$, $t(11)$, $t(33)$, i formem amb totes les relacions del tipus $t(00)$, esguardades com a elements, una nova classe. Farem el mateix amb totes les relacions que tinguin el tipus $t(01)$ Direm que el tipus de la classe total, formada amb relacions com a elements, totes de tipus $t(00)$, és el mateix del tipus superior $t((00))$; la classe dels $t(11)$ tindrà com a símbol del seu tipus, $t((11))$, etc.

$t((00))$ és el tipus d'una classe que aplega totes les relacions individuals (x fill de y , x menor que y , x amic de y); $t((11))$ és el tipus d'una classe que recull totes les relacions entre classes de primer ordre, etc.

Encara podem bastir tipus superiors més complicats. Una relació que uneixi relacions del tipus $t(00)$ (com a antecedents)

LÒGICA RELACIONAL

amb una classe de relacions individuals, tipus $t((00))$ que faci l'ofici de consegüents, serà del tipus $t[(00)((00))]$. En coneixem ja dos exemples $\dot{p}$, $\dot{s}$. En efecte: $\dot{p}$ és una relació que aplega, com a antecedents, un nombre determinat de relacions individuals, i, com a consegüent, la classe formada amb tots els parells comuns a les relacions dites.

Formulem ara, en tota la seva amplària, la regla d'ordre entre els tipus lògics.

32 A) *Regla primària dels tipus lògics.* — «Els valors d'una variable independent d'una funció proposicional determinada han de pertànyer tots al mateix tipus.»

Aplicacions:

32 Aa) Tots els elements d'una classe determinada han d'ésser del mateix tipus, puix que una classe és l'extensió pròpia o conjunt de valors d'una funció prop. Naturalment que els elements d'una classe α i de la seva complementària $\neg \alpha$ han d'ésser del mateix tipus.

32 Ab) Tots els antecedents d'una relació determinada, i, per llur banda, tots els consegüents, han de pertànyer al mateix tipus: no cal, però, que el tipus dels antecedents sigui el mateix que el dels consegüents. El tipus d'una relació complementària $\neg R$ ha d'ésser el mateix que el de la relació originària R .

32 Ac) Una classe no és un element d'ella mateixa; ni una funció, valor especial d'ella mateixa; per tal com, si la classe és del tipus $t(\xi)$, solament poden ésser elements seus els del tipus $t\xi$, i, essent $t(\xi)$, $t\xi$ diferents, la classe no pot ésser un argument d'ella ni un argument de la seva classe complementària.

Anomenarem ara *categoria* d'un objecte un nombre determinat en funció del tipus lògic al qual pertany.

El nombre propi d'una categoria és la *major* de les sumes que s'obtenen sumant a un dels nombres inclosos en l'expressió numèrica del tipus, el nombre dels parèntesis dins els quals es troba, menys una unitat, si comencem designant amb $t(0)$ el tipus d'un individu i volem que la seva categoria sigui zero. Convinguem en això i tindrem, v. gr., $t(3)$, categoria 4; $t(04)$, categoria 5; $t[(00)(23)]$, categoria 5; $t((01))$, categoria 3; $t[(0[1(01)])]$, cate-

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

goria 5, etc. Notem que la mateixa categoria numèrica pot ésser realitzada per diversos tipus.

32 *Ad*) La categoria numèrica de l'individu és zero, 0. La d'una classe és sempre major en una unitat que la dels seus elements. La d'una relació és sempre major en una unitat que la dels seus membres més alts.

Entre les operacions i definicions que hem estudiat trobem les següents categories:

1) Classes (una variable independent).

Categoria mínima 0: qualsevol individu $a, b, c, \dots$

Categoria mínima 1: $\vee, \wedge$.

Categoria mínima 2: Cl s.

2) Relacions (funcions amb dues variables). No existeix, naturalment, la categoria mínima zero, puix que la relació més elemental és sempre una classe de parells d'elements.

Categoria mínima 1: $\dot{\vee}, \dot{\wedge}$: tipus $t(00)$.

Categoria mínima 2: $\mathbb{C}, t[(00)(00)]; \epsilon, t(01); \mathbb{C}, t(11)$.

Categoria mínima 3: $Cl, t(21); \dot{p}, s, t(12); \dot{p}, \dot{s}, t[(00)((00))]; Rl, t[((00))(00)], \text{etc.}, \text{etc.}$

32 *Ae*) *Ambigüitat sistemàtica*. — Si α, β son dues classes de primera categoria i λ, λ dues altres de segona, i suposem que α està inclosa en β i que λ es troba també inclosa en λ , segons la regla de distinció entre els tipus lògics, no podríem escriure amb el mateix signe $\alpha \mathbb{C} \beta$ i $\lambda \mathbb{C} \lambda$, car, en aquest cas, la relació $\mathbb{C}$ tindria unes vegades com a antecedents classes de primera categoria; d'altres, classes de segona, la qual cosa no és permesa; i el mateix diríem respecte a les classes de categories superiors. Adaptant, doncs, el nombre dels signes a la teoria dels tipus lògics, hauríem d'escriure diferentment cadascun dels signes que representen operacions $\mathbb{C}, \dot{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{C}, \dots$, o definicions $\vee, \wedge, \dot{\vee}, \dot{\wedge}, Cl, \dot{p}, \dot{s}, \dot{p}, s, \dots$, segons les categories numèriques dels elements emprats. Així, $\alpha \mathbb{C}_1 \beta, \lambda \mathbb{C}_2 \lambda, \dots$, etc. I no ens bastarien pas els índexs simples, sinó que caldria emprar-ne de vegades d'altres de molt complicats. Per exemple, si volíem escriure curiosament la relació de subsumpció entre classes del tipus $t[(0[1(01)])]$ caldria escriure aquest índex al costat de $\mathbb{C}$, car aquesta relació és diferent de les anteriors.

LÒGICA RELACIONAL

Notem, però, que les lleis que valen per a cada espècie diferent de **C** (i el mateix diríem dels altres signes) són completament semblants. Abreujarem, doncs, enormement el tecnicisme dels signes a emprar, si no designem signes especials per a cada categoria numèrica respecte a la mateixa operació o definició **C**, sinó que emprem sempre sense índex el mateix signe **C**. Consegüentment, qualsevol dels teoremes de la teoria de les classes i relacions equival a molts, tants en nombre com siguin les categories dels elements emprats. V. gr.: el teorema $\alpha \mathbf{C} \beta \& \beta \mathbf{C} \gamma \rightarrow \alpha \mathbf{C} \gamma$ és un teorema diferent si l'apliquem a classes α , β , γ de primera categoria, a classes de segona, tercera..... Escrit, doncs, el teorema amb el signe **C**, és *ambigu*, car representa, sota una forma aparentment única, una pluralitat nombrosíssima de fórmules diferents.

D'això es dedueix que aquests signes escrits en la forma emprada no posseeixen cap tipus determinat; amb tot, aquestes diverses significacions del mateix signe es redueixen totes, quant a llurs propietats, a les del tipus inferior.

La importància teòrica d'aquestes teories ha minvat molt, com veurem més endavant.

§ 33

Funcions descriptives

Fins ara hem tractat gairebé sempre amb funcions proposicionals, això és, amb funcions que per a cada valor de les variables menaven a una prop. veritable o falsa: com « x és home», « x és major que y »..... Ara hem de considerar una altra classe de funcions, les *objectals* (Gegenstandsfunktionen, descriptives functions de *Pr. Math.*), les quals per a cada valor de la variable independent menen a un *objecte*. Per exemple, «L'autor de l'obra y »; per a y = Quixot, Lo Somni, Faust, Ilíada....., la funció ens mena a un objecte, a Cervantes, Bernat Metge, Goethe, Homer. En matemàtiques trobem nombrosos exemples en la teoria de les funcions: $x + \frac{1}{2}$ és una funció objectal, car per a $x = 0, 1, 2, 3$ mena als objectes $\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}$, etc., que no són propo-

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

sicions. Sin x és una funció objectal, car, per a diversos valors de x ens mena a diversos objectes: «pare de y », «el màxim de la funció $f(x)$ », etc., són exemples, entre moltíssims, de funcions objectals. S'anomenen també funcions descriptives, puix que ens descriuen un objecte sense anomenar-lo; i, com es veu en els exemples adduïts, una funció no és objectal si entre l'objecte descrit i el valor de la variable no existeix una relació (o relacions), i la presència d'aquesta relació amb el seu caire propi declara, sota un angle original, l'objecte. Així, la igualtat $1 = 1$ és una trivialitat; però no ho és $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; car la funció objectal sin x declara la unitat sota un punt de mira nou. Naturalment que si les funcions objectals ens declaren els objectes deslligats, no ens els presenten pas com a elements absoluts, sinó que cal esguardar-los com a antecedents de les prop. per tal de relligar totes les nostres recerques amb el càlcul proposicional, que és el fonamental de la logística.

La definició general d'una funció objectal és:

Def. 33.01 $R' y = (\exists x) (x R y)$. $R' y$ significa o mena a «l'únic x que té amb y la relació R ». Conseqüentment, si no existeix cap element x que digui amb y la relació R , o, si n'hi ha més d'un, totes les prop. sobre $R' y$ seran falses; prop. que tindran evidentment la forma $\varphi (R' y)$. Si R és la relació «autor de l'obra y », totes les prop. sobre l'autor de l'obra y , seran falses si l'obra ha estat feta en col·laboració. V. gr.: és falsa en aquest cas la prop. «L'autor de l'obra y és americà». Si R és la relació «fill de y », totes les prop. sobre «el fill de y » seran falses, si y no té fills; si R és la relació arc sin x , les prop. sobre l'arc el sinus del qual és x , seran falses, car per a qualsevol sin x corresponen molts arcs amb el mateix sinus.

Notem ara, quant a simbòlica, que les funcions proposicionals s'escriuran $f(y)$; les objectals, $R' y$.

En el càlcul de les classes hem emprat ja funcions objectals. Són, entre altres, p' , s' , Cl' , p' , s' , $R' P$.

Un objecte pot ésser descrit mitjançant dues o més relacions subordinades, v. gr., «el pare de l'autor de l'obra x », «el quadrat del sinus de x ». Definirem, en general:

LÒGICA RELACIONAL

Def. 33.02 $R' S' y = R' (S' y) = (\iota x) (x R y) [(\iota x) (x R y) S y]$. És clar que les prop. sobre $R' S' y$ demanaran dues condicions d'unicitat i existència respecte a les dues relacions R, S . No cal pas advertir que, en general, $R' S' y$ és diferent de $S' R' y$. I, semblantment, definirem funcions objectals amb tres o més relacions. Els teoremes següents es basen en els d'unicitat exposats en el § 27, II.

Teoremes importants:

33.11 $\vdash (R' y) f (R' y) \equiv (E b) \{ (x R y) \equiv_x (x = b) \} \& f (b)$.
(Vegeu 27.02.)

33.12 $\vdash E! R' y \& (z) \varphi (z) \rightarrow \varphi (R' y)$. Si existeix l'únic que té amb y la relació R , i tots els elements z del seu ordre posseeixen la propietat φ , la posseirà ell també: això és, la unicitat no fa perdre els altres predicats.

33.13 $\vdash (x = R' y) \equiv [(z R y) \equiv_z (z = x)]$. Si existeix l'únic respecte a y segons R , qualsevol altre z que tingui amb y la mateixa relació és idèntic amb x .

33.14 $\vdash \{ E! R' y \& (y = z) \} \rightarrow (R' y = R' z)$. La identitat manté la unicitat.

33.15 $\vdash E! R' y \rightarrow \{ (a = R' y) \equiv (a R y) \}$. Si existeix l'únic que té amb y la relació R , se'n dedueix que afirmar que a ho és, equival a dir que a posseeix aquesta relació amb y . Aquesta prop. no és una trivialitat, puix que no val la inversa. Si és veritable $a R y$, no se'n dedueix sempre que existeixi l'únic que digui amb y la relació R . Si a és l'autor del Faust, això equival a dir que escriví el Faust; però de la prop. « a habita a Barcelona» no podem deduir «que a sigui l'habitant únic de Barcelona». Notem, per últim, que sempre cal saber per endavant si val $E! R' y$, si volem que sigui veritable la prop. $(a = R' y) \equiv (a R y)$. Si no ens consta l'existència del $R' y$, solament és sempre vàlida la implicació general,

33.16 $\vdash (x) [x R y \equiv x S y] \rightarrow [E! R' y \equiv E! S' y]$.

33.17 $\vdash (y) [R' y = S' y] \equiv \{ (y) [(E! R' y) \& (R = S)] \}$.

33.18 $\vdash E! P' Q' z \rightarrow E! Q' z$.

Si existeix el pare de l'autor de l'obra y , se'n dedueix «que existeix l'autor de l'obra y » (amb existència lògica, almenys).

§ 34

La inversa d'una relació. Relacions simètriques i asimètriques.

I. LA INVERSA D'UNA RELACIÓ. — Si R és una relació que uneix un determinat nombre de parells d'elements en un ordre determinat, la relació que existeix entre els mateixos elements en un ordre invers s'anomena relació inversa; i la primera, directa. Si R és la relació $<$, entre els parells $1, 2 : 2, 3 : 3, 4 : \dots$ la seva inversa serà $> : 2 > 1 : 3 > 2 : 4 > 3, \dots$, etc. La inversa de la relació «pare» és la de «fill»; la de doble, meitat; la d'abans, després. La inversa de R s'escriu $\check{R}$. $\check{R}$ pot ésser descrita amb una funció objectal; car, com es pot demostrar, qualsevol relació R (amb dues variables) té sempre solament una inversa. En aquest aspecte, $\check{R}$ serà designat amb $Inv' R$, «la inversa de R ». Tenim, doncs, dues notacions per a la inversa d'una relació, $\check{R}$ i $Inv' R$.

Def. 34.01 $\check{R} = \hat{x} \hat{y} (y R x)$.

Def. 34.02 $Inv = \hat{Q} \hat{P} \{ (x) (y) [(x Q y) \equiv (y P x)] \}$.

Teoremes:

34.11 $\vdash [Q Inv P \ \& \ R Inv P] \rightarrow (Q = P)$.

34.12 $\vdash x \check{P} y \equiv y P x$.

34.13 $\vdash E! Inv' P$. Qualsevol relació té una inversa.

34.14 $\vdash (P = Q) \equiv (\check{P} = \check{Q})$. Dues relacions són idèntiques si ho són llurs Inv .

34.15 $\vdash \check{\check{P}} = P$. La inversa de la inversa d'una relació és la mateixa relació.

34.16 $\vdash (P = \check{Q}) \equiv (Q = \check{P})$.

34.17 $\vdash P \subset Q \equiv \check{P} \subset \check{Q}$.

34.18 $\vdash P \subset \check{Q} \equiv \check{P} \subset Q$.

34.19 $\vdash \dot{E}! P \equiv \dot{E}! \check{P}$.

LÒGICA RELACIONAL

$$34.20 \quad \vdash (P) f (\breve{P}) \equiv (P) f (P).$$

$$34.21 \quad \vdash (E P) f (\breve{P}) \equiv (E P) f (P).$$

$$34.22 \quad \vdash \text{Inv}' (P \dot{\cap} Q) \equiv \text{Inv}' P \dot{\cap} \text{Inv}' Q.$$

$$34.23 \quad \vdash \text{Inv}' (P \cup Q) \equiv \text{Inv}' P \cup \text{Inv}' Q.$$

$$34.24 \quad \vdash [y = \breve{P}' x] \equiv (z) [(x P z) \equiv (z = y)].$$

Per a la representació gràfica notem que la llista dels parells propis de $\breve{R}$ s'obté de la de R invertint l'ordre dels elements. L'esquema vectorial de $\breve{R}$ surt del de R , invertint la direcció dels vectors. L'esquema matricial de $\breve{R}$ s'obté del de R , invertint les dues parts simètriques respecte a la diagonal principal.

II. RELACIONS SIMÈTRIQUES I ASIMÈTRIQUES. — Una relació R s'anomena simètrica si R i $\breve{R}$ són una mateixa relació; això és, es realitzen ambdues entre els mateixos parells de valors i en el mateix ordre. En són exemple la relació d'igualtat; si val $a = b$, val $b = a$; la d'immediació, la d'«amic». I notem que, en les relacions simètriques, el mateix signe val amb els termes invertits. Una relació R s'anomena asimètrica quan $\breve{R}$, R s'exclouen; de manera que, si amb un parell d'elements, l'una dóna una prop. veritable, l'altra en donarà una de falsa; d'aquí la necessitat d'emprar per a les relacions asimètriques dos signes diferents. Exemples: La relació $<$, la seva inversa és $>$; si val $1 < 2$, no val $1 > 2$, sinó $2 > 1$; la de «pare de», la inversa de la qual és «fill de»; la de «doble que», inversa «meitat que». En una relació *asimètrica* mai no es troba un mateix parell d'elements que, amb el mateix ordre, satisfaci R i $\breve{R}$. En canvi, en les relacions *no-simètriques* de vegades la inversa i la directa es realitzen en un mateix parell en el mateix ordre. De vegades, però, no es dóna aquest cas. N'és un exemple la relació «y no és major que x». La directa i la inversa es poden realitzar entre els mateixos elements. «1 no és *major* que 1», « $1 \leq 1$ »; i «1 no és *menor* que 1», « $1 \geq 1$ ». La relació «germà de» és també d'aquesta classe; car, si a és germà de b , podrà ésser que b sigui germà de a , o bé que b sigui germana de a .

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Les definicions tècniques són:

Def. 34.03 $Sym = \hat{R} (\check{R} \subset R)$.

Def. 34.04 $As = \hat{R} (\check{R} \subset \div R)$.

Notem que no cal demanar per a les relacions simètriques $\hat{R} (\check{R} = R)$; car, segons 34.18, val $\check{R} \subset R = R \subset \check{R}$.

Quant a representacions gràfiques, la llista d'una relació simètrica enclou amb parells del tipus $a b$, els de $b a$. L'esquema matricial posseeix solament vectors dobles o circulars; l'esquema matricial és simètric en relació amb la diagonal principal. Si un lloc és ocupat, també ho serà el seu conjugat; en canvi, en una relació asimètrica, el lloc conjugat respecte a un altre d'ocupat, és buit; els vectors no són dobles.

§ 35

Funcions pluriobjectals dins una relació

I. FUNCIÓ PLURIOBJECTAL (o funció descriptiva plural, segons *Pr. Math.*). — La funció objectal R' y no menava sinó a un objecte (el descrit) per a cada valor de y , això és a saber, a «l'objecte que deia amb y la relació R ». Anomenem ara aquestes funcions *uni-objectals*. Sigui ara β una classe d'elements, $R'' \beta$ serà una funció que menarà a una altra classe d'objectes, això és, «els que tinguin amb un qualsevol de β la relació R ». Per exemple, la classe β aplegui com a elements els articles dels volums de l'Enciclopèdia Espasa, i sigui R la relació «autor de»; $R'' \beta$ descriu o determina un nou objecte, «la classe dels autors dels articles indicats». Si β és la classe dels «fills» i R la relació de paternitat, $R'' \beta$ determina un nou objecte, la classe dels pares. La classe β pot encloure un sol element, i aleshores escriurem $R'' y$, si és un element indeterminat, o $R'' a$, si és determinat. En els casos anteriors, $R'' a$ determinarà la classe o el conjunt dels autors de l'article A ; classe que, naturalment, podrà encloure un sol individu (o cap, classe nul·la), car en la definició de classe 26.21 no hem demanat pas que existís almenys un individu, sinó solament que hi hagués una

LOGICA RELACIONAL

funció prop. φ , la qual potser significa una propietat que no convé a cap individu, v. gr., «no ésser idèntic amb ell mateix», «ésser un cercle quadrat», «ésser solució de $x^2 + 1 = 0$ dins el camp real», etc. En canvi, R' y demanava, segons 33.01, l'existència d'un element únic. La raó d'aquesta diferència és la comoditat matemàtica; car exigir per a $R'' \beta$ l'existència d'una classe amb un element almenys, ens obligaria a tractar el zero d'una manera diferent que els altres nombres cardinals 1, 2, 3....., la qual cosa destorbaria la uniformitat convenient; encara que, essent definicions, tenim plena llibertat per a posar noves condicions.

Sigui β la classe formada amb dos elements (5, 6), i R la relació «menor que», dins els nombres naturals; aleshores, $R'' \beta$, o sigui R'' (5, 6), determina una classe composta dels elements 1, 2, 3, 4. Si β és la classe de les fraccions donades per la fórmula $1 - \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, 4$), i R la relació «menor que», aleshores la funció pluriobjectal $R'' \beta$, o sigui $R'' (1 - \frac{1}{2^n})$, determina una classe de fraccions que comprèn totes les fraccions pròpies menors que $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$. Sabem que R' y determina un sol element, a , i val aleshores $a R y$; de manera que a pot ésser anomenat l'*antecedent* de y , segons R . Les següents funcions descriptives determinaran classes que ens serviran per a estudiar els elements lògics constituïts de les relacions.

Prenguem ara com a punt de referència una classe de classes x en lloc d'una classe senzilla de primer ordre com l'emprada $R'' \beta$, i definirem $R''' x$ dient que és una classe que aplega totes les classes que tenen la relació R amb qualsevol membre de x i alhora la relació ϵ amb x .

II. ANTECEDENTS I CONSEGÜENTS D'UNA RELACIÓ. — La funció pluriobjectal $\vec{R}' y$ determina una classe d'elements, tots els que tenen amb y la relació R , això és, els antecedents de y segons R . En canvi, $\overset{\leftarrow}{R}' x$ determinarà la classe dels y que diuen amb x la relació R , això és, els consegüents de x segons R . Si R

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

és la relació $\leftarrow$, i y és 5, $\overrightarrow{\leftarrow} 5$ aplega els nombres 0, 1, 2, 3, 4; i si x és 2, $\overleftarrow{\leftarrow} 2$ comprèn els nombres 3, 4,.... Si R és la relació de pare a fill, $\overrightarrow{R}$ y és la classe dels pares de y ; $\overleftarrow{R} x$, la dels fills de x . Sin' x determina la classe dels arcs el sinus dels quals és x , això és, els valors de la funció arc. sin x . Les definicions correctes són:

Def. 35.01 $\overrightarrow{R'} y = \hat{x} (x R y)$.

Def. 35.02 $\overleftarrow{R'} x = \hat{y} (x R y)$. I els signes $\overrightarrow{R}$, $\overleftarrow{R}$ es defineixen,

Def. 35.03 $\overrightarrow{R} = \hat{\alpha} \hat{y} [\alpha = \hat{x} (x R y)]$.

Def. 35.04 $\overleftarrow{R} = \hat{\beta} \hat{x} [\beta = \hat{y} (x R y)]$.

Def. 35.05 $R'' \beta = \hat{x} [(E y) \& y \varepsilon \beta \& (x R y)]$.

Per tal de designar la relació entre $\overrightarrow{R}$ i R , entre R i $\overleftarrow{R}$, això és, la relació entre els antecedents i la mateixa relació en conjunt, la relació entre els consegüents i R , escriurem sg (abreviació de sagitta) i gs , això és:

Def. 35.06 $sg = \hat{A} \hat{R} (A = \overrightarrow{R})$.

Def. 35.07 $gs = \hat{A} \hat{R} (A = \overleftarrow{R})$.

Aquesta definició ens permetrà d'ometre la fletxa sobre relacions massa llargues, quan voldrem expressar la classe dels antecedents o la dels consegüents.

Notem que si R és una relació homogènia, això és, en la qual els antecedents i consegüents siguin del mateix tipus, $\overleftarrow{R}$ i $\overrightarrow{R}$ no són homogenis, car refereixen una *classe* (la dels antecedents o la dels consegüents) amb un *individu* (de la classe dels consegüents o de la dels antecedents).

Teoremes:

35.11 $\vdash (\overrightarrow{R} = \overrightarrow{S}) \equiv (R = S)$.

35.12 $\vdash (\overleftarrow{R} = \overleftarrow{S}) \equiv (R = S)$. Això és, si dues relacions R , S tenen els mateixos antecedents o consegüents, són idèntiques.

LÒGICA RELACIONAL

$$35.13 \quad \vdash x \in \overrightarrow{R'} y \equiv x R y.$$

35.14 $\vdash y \in \overleftarrow{R'} x \equiv x R y$. Això és, que x pertanyi a la classe dels antecedents de y segons R , equival a afirmar que entre x , y val R ; i, semblantment, per als conseqüents.

35.15 $\vdash x \in \overrightarrow{R'} y \equiv y \in \overleftarrow{R'} x$. Si x és un dels antecedents de y segons R , y és un dels conseqüents de x , segons R .

35.16 $\vdash (R \subset S) \rightarrow (\overrightarrow{R'} y \subset \overrightarrow{S'} y) \ \& \ (\overleftarrow{R'} x \subset \overleftarrow{S'} x)$. Si la relació R es troba dins la S , se'n dedueix que els antecedents de y segons R , es troben enclosos en els antecedents de y segons S ; i el mateix s'esdevé amb els conseqüents.

$$35.17 \quad \vdash (A \text{ sg } R) \equiv (A = \overrightarrow{R}).$$

$$35.18 \quad \vdash (A \text{ gs } R) \equiv (A = \overleftarrow{R}).$$

$$35.19 \quad \vdash \overrightarrow{R} = \text{sg}' R.$$

$$35.20 \quad \vdash \overleftarrow{R} = \text{gs}' R.$$

$$35.21 \quad \vdash [\text{sg}' (R \dot{\cap} S)]' y = \overrightarrow{R'} y \cap \overrightarrow{S'} y.$$

35.22 $\vdash [\text{gs}' (R \dot{\cap} S)]' x = \overleftarrow{R'} x \cap \overleftarrow{S'} x$. I les dues lleis semblants per a $\cup$.

Declarem amb un exemple les dues darreres lleis. Sigui R la relació « u és nombre primer amb w »; S , la de $>$, i sigui y el nombre 10. Aleshores, 35.21 diu: La classe dels antecedents de 10, segons la relació composta $R \dot{\cap} S$, són els nombres naturals que pertanyin *ahora* a les dues classes determinades pels antecedents de 10 segons R i segons S , això és, la classe dels nombres primers amb 10 i ensem menors que 10; són (1, 3, 7). Solament aquests nombres compleixen ambdues condicions o relacions R , S . És molt senzill d'acomodar aquest exemple per a 35.22. Notem que en la part esquerra hem escrit $\dot{\cap}$, i en la dreta $\cap$; car en aquesta es tracta de classes; en aquella, però, de relacions. Ja podem entreveure com amb el simbolisme introduït podrem copsar els matisos més fins de l'estructura de les relacions i nocions matemàtiques.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

III. PREDOMINI, POSTDOMINI I CAMP D'UNA RELACIÓ. — Si R és una relació, *el* predomini de R (Vorbereich, dels lògistics alemanys; domain, dels anglesos) $D' R$, és la classe dels termes que fan l'ofici d'antecedents amb un altre element *qualsevol*. El *postdomini* (Nachbereich, converse domain) $Q' R$, és la classe sencera dels termes que fan l'ofici de conseqüents. El camp de R , $C' R$, és la suma (operació) d'ambdues classes $D' R$ i $Q' R$. La relació R serà homogènia, si ambdues classes són del mateix tipus: en cas contrari, inhomogènia. Per tal que existeixi el camp de R , $C' R$, això és, per tal de poder fer la suma conjuntual, $D' R \cup Q' R$, cal que ambdues classes siguin del mateix tipus; amb altres paraules, que R sigui homogènia.

Quant a la representació gràfica, notem que el predomini comprèn tots els punts d'on surten els vectors, i el postdomini tots els punts vers els quals es dirigeixen els vectors; per tant, punts amb vectors circulars pertanyen al pre i al postdomini.

Les definicions tècniques són:

Def. 35.08 $D' R = \hat{x} [(E y) \& (x R y)]$.

Def. 35.09 $Q' R = \hat{y} [(E x) \& (x R y)]$.

Def. 35.011 $C' R = \hat{x} \{ (E y) \& [x R y \vee y R x] \} = D' R \cup Q' R$.

Def. 35.012 $D = \hat{\alpha} \hat{R} \{ \alpha = \hat{x} [(E y) \& x R y] \}$.

Def. 35.013 $Q = \hat{\beta} \hat{R} \{ \beta = \hat{y} [(E x) \& x R y] \}$.

Def. 35.014 $C = \hat{\gamma} \hat{R} \{ \gamma = \hat{x} [(E y) \& (x R y \vee y R x)] \}$.

Encara ens manca una definició que expressi la relació entre un element qualsevol x amb R , quan x és membre del camp de R : anomenem aquesta relació F , i definirem:

Def. 35.015 $F = \hat{x} \hat{R} \{ (E y) \& [x R y \vee y R x] \} = \hat{x} \hat{R} (x \in C' R)$.

El camp d'una relació és una noció fonamental per a la teoria lògica de les sèries.

Exemples: Sigui R la relació «casat amb»; $D' R$ és la classe dels marits; $Q' R$ la de les mullers; $C' R$, tots els casats. Si R és la relació «pare», i M la relació «mestre», $D' R$ és la classe dels

LÒGICA RELACIONAL

pares, $\mathbf{D}'(R \dot{\cap} S)$ és la classe dels pares que són alhora mestres de llurs fills; $\mathbf{D}'R \cap \mathbf{D}'S$ és la classe, molt més nombrosa, de pares que són alhora mestres de qualssevol individus. Si R és la relació «quadrat de y » (y enter), $\mathbf{D}'R$ comprèn la classe o conjunt de tots els quadrats perfectes, $\mathbf{D}'R$ aplega tots els enters.

Teoremes fonamentals:

$$35.23 \quad \vdash x \in \mathbf{D}'R \equiv (E y) \ \& \ (x R y).$$

$$35.24 \quad \vdash y \in \mathbf{D}'R \equiv (E x) \ \& \ (x R y).$$

$$35.25 \quad \vdash x \in \mathbf{C}'R \equiv (E y) \ \& \ [x R y \vee y R x].$$

$$35.26 \quad \vdash \overrightarrow{R'} y \mathbf{C} \mathbf{D}'R.$$

35.27 $\vdash \overleftarrow{R'} x \mathbf{C} \mathbf{D}'R$. La classe dels precedents de y o la dels conseqüents de x segons R , es troben contingudes dins el pre-domini, la primera; i dins el postdomini, la segona.

35.28 $\vdash \mathbf{D}'R \mathbf{C} \mathbf{D}'R \equiv [\mathbf{D}'R = \mathbf{C}'R]$. Si la classe dels antecedents es troba dins la dels conseqüents, això equival a dir que la classe dels conseqüents emplena tot el camp de la relació, això és, no hi ha cap antecedent absolut, cap antecedent que no sigui conseqüent, respecte a un altre element: per tant, la relació R no posseeix *terme inicial*.

35.29 $\vdash \mathbf{D}'R \mathbf{C} \mathbf{D}'R \equiv [\mathbf{D}'R = \mathbf{C}'R]$. Semblant interpretació: no existeix cap conseqüent final, absolut: tots són, respecte a un terme o a un altre, antecedents, i, per tant, la relació no té *terme final*.

Ambdós teoremes són fonamentals per a l'estudi lògic de les sèries, progressions..... com veurem. Les relacions R que compleixen aquestes condicions menen a sèries.

35.301 $\vdash \mathbf{D}'R = \mathbf{D}'\check{R}$. Els conseqüents de la relació directa són els antecedents de la inversa.

$$35.302 \quad \vdash \mathbf{D}'R = \mathbf{D}'\check{R}.$$

35.31 $\vdash \mathbf{C}'R = \mathbf{C}'\check{R}$. El camp de la relació directa és el mateix que el de la seva inversa.

$$35.32 \quad \vdash \mathbf{D}'(R \dot{\cap} S) \mathbf{C} (\mathbf{D}'R \cap \mathbf{D}'S).$$

35.33 $\vdash \mathbf{D}'(R \cup S) = (\mathbf{D}'R \cup \mathbf{D}'S)$; i lleis semblants per a $\mathbf{D}$. Noteu que en 35.32 val el signe $\mathbf{C}$; la qual cosa ens diu (i és molt clar) que la classe dels antecedents que emplenen alhora la re-

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

lació $R \dot{\cap} S$ conté menys elements que la classe corresponent als antecedents de les relacions deslligades. En canvi, en 35.33 val =.

$$35.34 \vdash C' (R \cup S) = C' R \cup C' S.$$

$$35.35 \vdash C' (R \dot{\cap} S) \subset C' R \cap C' S.$$

$$35.36 \vdash (R \subset S) \rightarrow (D' R \subset D' S).$$

$$35.37 \vdash (R \subset S) \rightarrow (D' R \subset D' S).$$

$$35.38 \vdash (R \subset S) \rightarrow (C' R \subset C' S).$$

$$35.39 \vdash C' R = D' (R \cup \check{R}).$$

$$35.40 \vdash D' \dot{\vee} = D' \dot{\vee} = C' \dot{\vee} = \vee.$$

IV. RELACIONS AMB PRE-POSTDOMINI I CAMP LIMITATS. — Considerem ara les relacions derivades d'una relació general, en limitar el pre, postdomini o bé ambdós alhora. Anomenem, aquestes relacions, *parcials*; i distingirem entre relacions *dextroparcials*, quan no prenem la classe sencera dels antecedents, ans només una subclasse α , la qual cosa s'escriurà $\alpha \uparrow R$; i relacions *sinistroparcials*, quan considerarem, no pas la classe sencera dels conseqüents, sinó una subclasse β , el que serà simbolitzat amb $R \uparrow \beta$, i per últim, s'anomenaran relacions *parcials* aquelles en les quals hàgim fet ambdues limitacions, $\alpha \uparrow R \uparrow \beta$.

Exemples: Les relacions «germà de», «germana de», són una mateixa relació, la de «filiació respecte als mateixos pares»; si representem aquesta amb R , la primera amb R_1 , i la segona amb R_2 , veiem immediatament que $R_1 = \alpha \uparrow R$. La relació de germà és la mateixa de filiació restringint el camp dels antecedents a la classe α dels fills; i R_2 és la mateixa R , limitant el camp dels antecedents a la classe de les filles $R_2 = \beta \uparrow R$. I si considerem la relació general «fill de γ », $R \uparrow \mu$ és la relació limitada en el postdomini, als fills dels individus continguts en la classe μ .

És clar que en aquest exemple podem considerar dues limitacions ensems, la del pre i la del postdomini.

Una funció aritmètica és considerada en la teoria de les relacions, com una relació entre els valors de la funció i els de la variable independent, v. gr., les funcions «quadrat de γ », «sinus de». Si volem que la relació imposada per la funció es restringeixi a nombres reals, o solament als racionals, o solament als enters po-

LÒGICA RELACIONAL

sitius....., obtindrem de la mateixa relació primitiva d'altres amb pre i postdomini limitats alhora o un d'ells solament. Si Q designa la relació «quadrat de» i α la classe dels nombres racionals; β , la dels naturals, $\alpha \uparrow Q$ és la relació Q , o si volem una nova relació els antecedents de la qual siguin exclusivament els quadrats dels nombres racionals; és fàcil interpretar $Q \uparrow \alpha$, $\alpha \uparrow Q \uparrow \beta$. El mateix diríem respecte a la relació «sinus de».

Troblem un cas particular interessant, si impossem la mateixa limitació a la classe total dels antecedents i conseqüents, això és, $\alpha \uparrow R \uparrow \alpha$: en aquest cas direm que la limitació ha estat imposada al camp de la R , i adoptarem la notació $R \upharpoonright \alpha$. Un exemple: $< \upharpoonright \beta$, o, $\beta \uparrow < \upharpoonright \beta$, o considerar solament la relació $<$ entre nombres naturals: $< \upharpoonright \beta$ entre racionals, i no $\alpha \uparrow < \upharpoonright \beta$, entre racionals i reals; suposant que α , β signifiquin les classes indicades de nombres.

És convenient de vegades considerar la relació entre dos elements x , y , en tant que x és un membre de α , i y un membre de β . En lloc, v. gr., de considerar la relació general de «filiació», aplegant en el predomini tots els fills i en el postdomini tots els pares, podem considerar la relació especial entre un fill x i un pare y , per raó de pertànyer x a la classe α dels fills de y , i y a la classe β dels pares de x ; la qual cosa es designa amb $\alpha \uparrow \beta$.

Les definicions tècniques d'aquestes nocions són:

Def. 35.016 $\alpha \uparrow R = \hat{x} \hat{y} (x \in \alpha \ \& \ x R y)$.

Def. 35.017 $R \upharpoonright \beta = \hat{x} \hat{y} (x R y \ \& \ y \in \beta)$.

Def. 35.018 $\alpha \uparrow R \upharpoonright \beta = \hat{x} \hat{y} (x \in \alpha \ \& \ x R y \ \& \ y \in \beta)$.

Def. 35.019 $\alpha \uparrow \beta = \hat{x} \hat{y} (x \in \alpha \ \& \ y \in \beta)$.

Def. 35.020 $R \upharpoonright \alpha = \alpha \uparrow R \upharpoonright \alpha$.

Teoremes fonamentals:

35.41 $\vdash \alpha \uparrow R \upharpoonright \beta = (\alpha \uparrow R) \dot{\cap} (R \upharpoonright \beta)$.

35.42 $\vdash (\alpha \uparrow R) \dot{\cap} (S \upharpoonright \beta) = \alpha \uparrow (R \dot{\cap} S) \upharpoonright \beta$.

35.43 $\vdash (\alpha \uparrow R) \dot{\cap} (\beta \uparrow S) = (\alpha \cap \beta) \uparrow (R \dot{\cap} S)$.

35.44 $\vdash (R \upharpoonright \alpha) \dot{\cap} (S \upharpoonright \beta) = (R \dot{\cap} S) \upharpoonright (\alpha \cap \beta)$.

35.45 $\vdash (\alpha \uparrow R \upharpoonright \beta) \dot{\cap} (\alpha' \uparrow S \upharpoonright \beta') = (\alpha \cap \alpha') \uparrow (R \dot{\cap} S) \upharpoonright (\beta \cap \beta')$.

35.46 $\vdash (\alpha \subset \beta) \rightarrow [\alpha \uparrow R \subset \beta \uparrow R]$.

35.47 $\vdash (\beta \subset \gamma) \rightarrow [R \upharpoonright \beta \subset R \upharpoonright \gamma]$.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

- 35.48 $\vdash (\alpha \mathbf{C} \gamma) \& (\beta \mathbf{C} \delta) \rightarrow [(\alpha \uparrow R \uparrow \beta) \mathbf{C} (\gamma \uparrow R \uparrow \delta)].$
 35.49 $\vdash \alpha \uparrow R \mathbf{C} R.$
 35.50 $\vdash R \uparrow \beta \mathbf{C} R.$
 35.51 $\vdash \alpha \uparrow R \uparrow \beta \mathbf{C} R.$
 35.52 $\vdash (R \mathbf{C} S) \rightarrow (\alpha \uparrow R \mathbf{C} \alpha \uparrow S).$
 35.53 $\vdash \text{Inv}' (\alpha \uparrow R) = \check{R} \uparrow \alpha.$
 35.54 $\vdash \text{Inv}' (R \uparrow \beta) = \beta \uparrow \check{R}.$
 35.55 $\vdash \text{Inv}' [\alpha \uparrow R \uparrow \beta] = \beta \uparrow \check{R} \uparrow \alpha.$
 35.56 $\vdash \text{Inv}' (\alpha \uparrow \beta) = \beta \uparrow \alpha.$
 35.57 $\vdash \mathbf{D}' (\alpha \uparrow R) = \alpha \cap \mathbf{D}' R.$
 35.58 $\vdash \mathbf{D}' (R \uparrow \beta) = \beta \cap \mathbf{D}' R.$
 35.59 $\vdash V \uparrow R = R \uparrow V = V \uparrow R \uparrow V = V.$
 35.60 $\vdash (R) \varphi (\mathbf{D}' R) \equiv (\alpha) \varphi (\alpha).$ I lleis semblants per a $\mathbf{D}' R, \mathbf{C}' R.$
 35.61 $\vdash (E R) \varphi (\mathbf{D}' R) \equiv (E \alpha) \varphi (\alpha).$ I lleis semblants per a $\mathbf{D}' R, \mathbf{C}' R.$

Les dues darreres fórmules diuen que «afirmar que els antecedents d'una relació qualsevol R , posseeixen la propietat φ , equival a l'assertió que qualsevol classe α posseirà la mateixa propietat»: «si existeix almenys una relació R que té la propietat φ , existirà almenys una classe α que la posseirà».

35.49, 50, 51 diuen que les relacions limitades són parts de la total.

35.52 afirma que si una relació és part d'una altra, les relacions limitades de la primera continuaran essent parts de la segona.

35.46, 47, 48 formulen la llei: si una classe es troba dins una altra i limitem, segons elles, la relació R , les relacions limitades per la primera classe es troben dins les limitades per la segona.

Les primeres lleis formulen propietats anàlogues a la distributiva i associativa.

35.53, 54, 55, 56 indiquen la manera de formar la limitació de la relació inversa, limitada la directa.

35.59 demostra que V (la classe universal) no limita cap relació, fa l'ofici de la unitat. $1 \cdot A = A \cdot 1 = 1 \cdot A \cdot 1.$

35.57, 58 indiquen la manera de formar els antecedents d'una relació limitada.

LÒGICA RELACIONAL

Amb una mica de pràctica és faedor de donar a tots aquests teoremes una demostració conceptual.

Els teoremes més importants per a relacions limitades són:

- 35.62 $\vdash (C' R C \alpha) \equiv (R \downarrow \alpha = R).$
- 35.63 $\vdash P \downarrow C' P = P.$
- 35.64 $\vdash P \alpha \downarrow \dot{\cap} Q \downarrow \beta = (P \dot{\cap} Q) \downarrow (\alpha \cap \beta).$
- 35.65 $\vdash P \downarrow \alpha \dot{\cap} P \downarrow \beta = P \downarrow (\alpha \cap \beta).$
- 35.66 $\vdash P \downarrow \alpha \dot{\cap} Q \downarrow \alpha = (P \dot{\cap} Q) \downarrow \alpha.$
- 55.67 $\vdash (P \downarrow \alpha) \downarrow \beta = P \downarrow (\alpha \cap \beta).$
- 35.68 $\vdash (P \cup Q) \downarrow \alpha = P \downarrow \alpha \cup Q \downarrow \alpha.$
- 35.69 $\vdash (\alpha C \beta) \rightarrow [P \downarrow \alpha C P \downarrow \beta].$
- 35.70 $\vdash P C Q \rightarrow (P \downarrow \alpha C Q \downarrow \alpha).$
- 35.71 $\vdash P \downarrow V = P.$
- 35.72 $\vdash Inv' P \downarrow \alpha = (\check{P}) \downarrow \alpha.$

V. PROPIETATS I TEOREMES GENERALS SOBRE FUNCIONS PLURI-OBJECTALS.

Def. 35.021 $R'' \beta = \hat{x} \{ (E y) \& y \in \beta \& x R y \}$, que és la definició tècnica de la noció exposada en I. Per tal d'expressar la relació que existeix entre $R'' \beta$, classe descrita per $R'' \beta$, i la mateixa classe β , introduïm un nou símbol R_ϵ . R_ϵ és, doncs, la relació que existeix entre dues classes α , β quan α està formada precisament de tots els termes que posseeixen la relació R amb qualsevol dels elements enclosos en la classe β .

Def. 35.022 $R_\epsilon = \hat{\alpha} \hat{\beta} \{ \alpha = R'' \beta \}.$

Un cas molt important és, si existeix $R' y$ per a cada y , que compleixi la condició $y \in \beta$; això és, si cada element de β té un sol element x , l'únic x que té amb ell la relació R ; car en altres relacions es podrà esdevenir molt bé que per a cada y dins β es trobin molts x que tinguin amb ell la relació R . Si la primera hipòtesi es realitza, expressarem que, per a cada y , sotmès a la condició $y \in \beta$, es dona $R' y$, amb $E !! R'' \beta$.

Def. 35.023 $E !! R'' \beta = (y) (y \in \beta \rightarrow E ! R' y).$

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Teoremes:

$$35.73 \quad \vdash R'' \alpha \subset D' R.$$

$$35.74 \quad \vdash \check{R}'' \alpha \subset Q' R.$$

$$35.75 \quad \vdash (\alpha \subset \beta) \rightarrow (P'' \alpha \subset P'' \beta).$$

$$35.76 \quad \vdash (P = Q) \rightarrow (P'' \beta = Q'' \beta).$$

$$35.77 \quad \vdash (E! R' y \ \& \ y \varepsilon \alpha) \rightarrow (R' y \varepsilon R'' \alpha).$$

Notem la significació de 35.75. Tradueix tècnicament la inferència asillogística descoberta per Jungius, mestre de Leibnitz (L. Couturat, *La logique de Leibnitz*, cap. III, § 15), «*Circulus est figura: ergo, qui circulum describit is figuram describit*». Prenguem aquí com classe α , la dels cercles; com a classe β , la de les figures. Val evidentment $\alpha \subset \beta$. Aquí la relació P és la de « α descriu la figura y ». I aleshores la llei diu: «Si la classe dels cercles es troba inclosa en la de les figures, es dedueix que la classe o conjunt d'individus (sigui un o més d'un) que descriuen la classe dels cercles es troba inclosa en la classe dels individus que descriuen la classe de les figures.»

I 35.77 formula un altre tipus d'inferència asillogística: emprem l'exemple de Jevons, adduït i comentat per Russell (*Pr. Math.*, I², pàg. 291): «Si existeix *el* cap del cavall i el cavall és un animal, es dedueix que *el* cap del cavall és cap d'un animal.» Jevons proposava l'exemple d'una manera imperfecta: «Per tal com el cavall és un animal, el cap del cavall és el cap d'un animal.» En aquesta forma no val la llei: és necessària la condició prèvia existencial $E! R' y$; car, si l'animal considerat no té cap, encara que sigui animal, com s'esdevé amb els inferiors de l'escala zoològica, la inferència no té valor.

§ 36

Producte relatiu de dues relacions

I. DEFINICIONS INICIALS. — Si valen $x R y$ i $y S z$, la nova relació que resulta entre x , z s'anomena *producte relatiu* de R , S , i s'escriu $R | S$; o bé $x (R | S) y$. (Per estalviar parèntesis suposarem

LÒGICA RELACIONAL

que $|$ uneix més que $\cup$, $\cap$, $\div$.) Si, per exemple, R és la relació « x és germà de y », i S , la « y és pare de z », la nova relació $x(R|S)y$ és « x és oncle de z ». Si R és la relació « x és pare de y », i S , la de « y és pare de z », la relació entre x , z és « x és avi de z », $x(R|S)y$. Si R és la relació « x és la meitat de y », i S , la de « y és la meitat de z », $x(R|S)y$ és la relació « x és un quart de z ». La nova operació o relació és de caràcter lògic a causa de la seva estructura purament formal.

L'operació $R|S$ realitzada (en general) amb una nova relació ultra la R , s'anomena «concatenació» (Verkettung), o producte relatiu (*Prin. math.*), i solament és legítima si $\mathbf{D}'R$ i $\mathbf{D}'S$ són del mateix tipus, car un mateix terme (o classe d'ells) ha de pertànyer a ambdues relacions, a la classe dels conseqüents de R , $\mathbf{D}'R$, i a la dels antecedents de S , $\mathbf{D}'S$. En lloc de $R|R$, escriurem R^2 ; en lloc de $R^2|R$, R^3 , etc. R^1 serà el mateix que R , i, per últim, la *identitat* dins el camp de la relació R (en cas que s'hi trobi, la qual cosa no passa d'ordinari, com veurem) serà designada amb R^0 . Sigui R la relació $<$; $R|R$ o R^2 correspon al pas de $(x < y) \& (y < z)$ a $(x < z)$ (conservació de la mateixa classe de relació, la qual cosa no s'esdevé d'ordinari). En canvi, R^0 no existeix, car no hi ha en tot el camp de la relació $<$ un terme w , per al qual valgui $w < w$. Si R és la relació $=$, surt de $(x = y) \& (y = z)$, $(x = z)$, R^2 : $R^2|R$ equival a $(x = z) \& (z = w)$, doncs $(x = w)$, etc.; i existeix R^0 , car val sempre $x = x$, $y = y$ Designarem amb I la relació d'identitat i amb J la de diversitat.

Les definicions tècniques són:

Def. 36.01 $R|S = \hat{x} \hat{z} \{ (E y) \& (x R y \& y S z) \}$.

Def. 36.02 $R^2 = R|R$.

Def. 36.03 $R^3 = R^2|R$.

Def. 36.04 $R^0 = I \upharpoonright \mathbf{C}'R$.

II. TEOREMES IMPORTANTS.

36.11 $\vdash \text{Inv}'(R|S) = \check{S}|\check{R}$. Per tal com $R|S$ és una nova relació diferent, en general, de R i S , podem formar la seva inversa, que s'obté invertint l'ordre de $R|S$ i formant ensems les

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

inverses $\check{R}$, $\check{S}$. $\check{S} | \check{R}$ serà, naturalment, una nova relació, diferent, en general, de S , R . Comprovi's amb els exemples adduïts.

36.12 $\vdash (P | Q) | R = P | (Q | R)$. Propietat associativa.

36.13 $\vdash P | (Q \dot{\cap} R) \subset (P | Q) \dot{\cap} (P | R)$. Idem distributiva.

36.14 $\vdash (P \dot{\cap} Q) | R \subset (P | Q) \dot{\cap} (Q | R)$. En general, no val, però, la llei commutativa.

36.15 $\vdash (R = R') \rightarrow (R | P = R' | P)$. Propietat de monotonia.

36.16 $\vdash (R = R') \rightarrow (P | R = P | R')$. Propietat de monotonia.

36.17 $\vdash (R = R') \rightarrow (P | R | Q = P | R' | Q)$. Propietat de monotonia.

36.18 $\vdash E! (P | Q) \equiv E! (\mathbf{C}' P \cap \mathbf{D}' Q)$.

36.19 $\vdash E! (P | Q) \equiv \dot{E}! P \& \dot{E}! Q$.

36.20 $\vdash x \in \mathbf{D}' R \equiv x (R | \check{R}) x$.

36.21 $\vdash (R \subset P \& S \subset Q) \rightarrow (R | S \subset P | Q)$.

36.22 $\vdash E! P' Q' z \rightarrow [P' Q' z = (P | Q)' z]$. Notem que són molt diferents, en general, $(R | S)' z$ i $R' S' z$. Sigui R la relació «arrel quadrada positiva de»; i S , la d'«arrel quadrada real de». Valen $E! (R | S)' 81$, i $(R | S)' 81$; car hi ha un sol nombre 3, que té amb 81 les relacions dites ($3 R 9 \& 9 S 81$). En canvi, és fals $E! R' S' 81$, car això demana que només hi hagi una arrel real de 81, i existeixen dues 9, -9 . $R' \pm 9$ es compleix, car només hi ha una arrel positiva de 9, $+3$. Amb això resta declarat perquè **36.22** no val sinó en la direcció indicada. Pot, doncs, existir $(P | Q)' z$ i no pas $P' Q' z$, que demana dues condicions d'unicitat.

36.23 $\vdash x R^2 y \equiv (E z) \& x R z \& z R y$.

36.24 $\vdash x R^3 y \equiv (E z, w) \& x R z \& z R w \& w R y$.

36.25 $\vdash R^3 = R | R^2$.

36.26 $\vdash x R x \rightarrow x R^2 x$. Aquesta llei és molt important. Si la primera potència de la relació R convé al mateix element x , la segona també li convé (aplicació a la relació d'igualtat, de $x = x$, es dedueix que de $x = y \& y = x$ es dedueixi $x = x$). La reflexivitat en primera potència es conserva en la segona.

36.27 $\vdash Inv' (S | \check{S}) = S | \check{S}$. La relació $S | \check{S}$ és sempre simètrica; la qual cosa és igual a afirmar que la directa i la inversa són la mateixa relació.

36.28 $\vdash \mathbf{C}' (R | \check{R}) = \mathbf{D}' R$.

LÒGICA RELACIONAL

$$36.29 \quad \vdash C'(\check{R} \mid R) = \mathbf{Q}' R.$$

$$36.30 \quad \vdash R^\circ \mid R = R \mid R^\circ = R. \quad R^\circ \text{ és un mòdul.}$$

III. CLASSES DE RELACIONS SEGONS LES POTÈNCIES. — Una relació R s'anomena transitiva (Tr) si val $R^2 \subset R$; això és, si de $x R y$ & $y R z$ es segueix sempre $x R z$. En altres paraules: el producte relacional conserva la mateixa classe de relació. En són exemple les relacions $<$, $>$, $=$; en cas contrari s'anomenarà no-transitiva, i serà intransitiva (In) si R i R^2 s'exclouen mútuament. Exemple, la relació de «pare de», «l'avi de x mai no és pare de x ». Una altra relació intransitiva és la de «doble que», si x és doble que y i y és doble que z , x no és doble que z . Aleshores R^2 és una nova relació, (com ho són, d'ordinari, $R \mid Q$, $R \mid Q \mid S$, etc.) que es compleix precisament amb els parells que no satisfan R dins el mateix tipus. I una relació R s'anomena aliotransitiva (Al) si, d'ordinari, R val per a cada parell propi d'elements obtinguts amb l'operació R , entenent sots parell propi aquell en el qual els dos elements no són un mateix element. N'és un exemple la relació «germà de», car si x és germà de y i y és germà de z , z pot ésser el mateix x , i aleshores no val $x R^2 x$, car un no és germà amb ell mateix; o bé z serà un altre germà, amb el qual x dirà la relació $x R^2 z$. Si excloem, doncs, la identitat del camp de R , R val per a qualsevol parell propi d'elements. El mateix diríem de la relació «no és major que». Les definicions tècniques són:

$$\text{Def. 36.05} \quad Tr = \hat{R} (R^2 \subset R).$$

$$\text{Def. 36.06} \quad In = \hat{R} (R^2 \subset \dot{R}).$$

$$\text{Def. 36.07} \quad Al = \hat{R} [(R^2 \dot{\subset} I) \subset R].$$

Teoremes:

36.31 $\vdash (R = \check{R}) \& (R^2 \subset R) \rightarrow (R = R^2) \& (R^2 = R \mid \check{R})$. Si la relació R és simètrica ($R = \check{R}$) i transitiva, són idèntiques les relacions R , R^2 , i R és la mateixa relació que el producte relacional $R \mid \check{R}$. Aquesta propietat convé a totes les relacions amb un caire d'igualtat, v. gr., la identitat, la similitud.....

$$36.32 \quad \vdash (R = \check{R}) \& (R^2 \subset R) \equiv (R = \check{R}) \& (R^2 = R).$$
 Llei

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

que formula dues noves propietats de qualsevol relació simètrica i transitiva, a saber, R és idèntica amb la seva inversa, i R^2 amb R .

36.33 $\vdash Inv'' Tr = Tr$. La inversa d'una relació transitiva ho és ella mateixa també. Exemple, $<$, $>$.

Quant a la representació gràfica, notem que en la figura vectorial d'una relació transitiva, si va un vector d'un punt a un altre, de a a b , i d'aquest al c , existeix un vector de la mateixa classe que va de a a c directament; la qual cosa presenta una analogia amb la composició dels vectors reals, en cas d'unicitat direccional. En canvi, el vector nou resultant de dues relacions diferents $P | R$, $R | Q | R$ equival al cas de composició vectorial de dos vectors amb direcció diferent.

Una relació R s'anomena reflexiva (Rf) si cada un dels seus elements té amb ell mateix la relació R , això és, $R^\circ \subset R$. V. gr., la similitud. En cas contrari la R s'anomena no-reflexiva. Comprendent aleshores dues classes de relacions: relació irreflexiva (Irr), si R° i R s'exclouen del mateix parell de valors, v. gr., la relació $<$, $>$; si val $2 < 3$ no val $2 < 2$, ni $3 < 3$, això és, $R \subset J$; la relació R es troba dins la relació general de no-identitat; si tots els elements del tipus posseeixen la relació R amb ells mateixos, R s'anomena reflexiva total (Ref). V. gr.: la relació d'igualtat.

Def. 36.08 $Rf = \hat{R} \ (R^\circ \subset R)$.

Def. 36.09 $Irr = \hat{R} \ (R \subset J)$.

Def. 36.010 $Ref = \hat{R} \ (I \subset R)$.

Quant a la representació gràfica, notem que en una relació reflexiva cada punt posseeix un vector circular; en canvi, en una relació irreflexiva manquen totalment els vectors d'aquesta mena. Si la relació és totalment reflexiva, tots els elements del tipus posseeixen vector circular. L'esquema matricial d'una relació reflexiva té ocupada la diagonal principal. Al contrari, la diagonal principal és buida en les relacions irreflexives.

Teoremes importants:

36.34 $\vdash (R \in Rf \equiv R^\circ \subset R) \equiv (x) (x \in C' R \rightarrow x R x)$. Si una relació R és reflexiva, això és, la relació idèntica pertany a la

LÒGICA RELACIONAL

mateixa relació, podem afirmar per a qualsevol x que pertanyi al camp de R , que té amb ell mateix la relació R .

36.351 $\vdash Tr \cap Sym \subset Rf$. Una relació transitiva i simètrica pertany a la classe de les relacions reflexives. Exemple: la relació d'igualtat.

36.352 $\vdash R \in As \rightarrow R^2 \in Irr$. Si una relació és asimètrica, la seva segona potència és una relació irreflexiva. Exemple: la relació $<$; de $2 < 3$, $3 < 4$, etc., mai no arribarem a $2 < 2$; en canvi, de $a = b$ i $b = a$ arribem a $a = a$.

36.36 $\vdash As \subset Irr$. Una relació asimètrica és sempre irreflexiva.

36.37 $\vdash Tr \cap As = Tr \cap Irr$. Una relació que sigui ensem transitiva i asimètrica equival a una relació transitiva i irreflexiva. Notem, per a valorar aquest teorema, que si és cert que qualsevol relació asimètrica és sempre irreflexiva, no val la prop. inversa; que qualsevol relació irreflexiva sigui asimètrica; la relació « x és diferent de y » és irreflexiva, car un mateix element no és diferent d'ell mateix; i, amb tot, és simètrica, puix que si a és diferent de b , b és diferent de a : però aquesta relació no és sempre transitiva, car si 1 és diferent de 2 i 2 diferent de 3, 3 també és diferent de 1, i la nova relació entre 1,1 és la d'igualtat. En canvi, si la relació irreflexiva considerada és ensem transitiva, aleshores podem afirmar que també serà asimètrica: la transitivitat transforma la irreflexivitat en asimetria. N'és un exemple la relació $<$; ítem la de «pare de».

36.38 $\vdash P \in Tr \rightarrow P \upharpoonright \vdash \in Tr$.

36.39 $\vdash \dot{\bigwedge} \in Tr$.

§ 37

Relacions triargumentals i pluriargumentals

Una funció proposicional $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z, w)$,..., amb tres o més variables independents, s'anomena relació triargumental o pluriargumental. Cal predeterminedar-hi tres o més valors per tal d'obtenir una prop. veritable o falsa, i aleshores aquests valors

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

resten units, relacionats, mitjançant la funció considerada, la qual, si posseeix un contingut significatiu propi, donarà a qual-sevol d'ells un caire, una significació pròpia diferent en general de la dels altres valors de les variables independents. Si la relació $\varphi(x, y, z)$ és, v. gr., la de « x dona a y l'objecte z », x és el dador; y , el rebedor; z , l'objecte donat. Cada variable hi té, en virtut de la funció que les uneix, un caire propi. Les relacions triargumentals (i les superiors) tenen una importància molt minsa dins la logística i les seves aplicacions; car, com demostrà Löwenheim, el càlcul relacional general pot ésser reduït al binari, això és, a funcions de dues variables. Aquí només considerarem les triargumentals.

Def. 37.01 $u, v, w \in \hat{x} \hat{y} \hat{z} \varphi(x, y, z) = \varphi(u, v, w)$, «que els elements u, v, w , pertanyen al camp o classe dels valors x, y, z , per als quals val φ », vol dir només que $\varphi(u, v, w)$ és una prop. veritable. Si M és una relació triargumental, tenim:

Def. 37.02 $x M(y, z) = M(x, y, z)$.

Def. 37.03 $M'(y, z) = (\iota x) M(x, y, z)$. $M'(y, z)$ és una funció descriptiva o objectal que mena a l'únic x que, junt amb y, z , posseeixen la relació M .

Def. 37.04 $\vec{M}'(y, z) = \hat{x} [M(x, y, z)]$, que defineix els antecedents $\hat{x}$ que amb y, z tenen la relació M .

De manera anàloga al cas d'una relació biargumental definirem les operacions $\epsilon, \dot{\cap}, \cup, \mathbb{C}$, etc., per a relacions triargumentals.

Notem aquí que en les relacions triargumentals cal distingir entre domini primer, segon i tercer. En lloc dels dos dominis (pre i post) de les relacions biargumentals, els designarem amb $D'_1 M, D'_2 M, D'_3 M$, i el camp $C' M$ serà llur unió.

Def. 37.05 $D'_1 M = \hat{x} [(E y, z) \& M(x, y, z)]$, i definicions semblants per a $D'_2 m, D'_3 m$.

Def. 37.06 $C' M = D'_1 M \cup D'_2 M \cup D'_3 M$.

Una relació triargumental n'enclou tres de parcials, que designarem, emprant el simbolisme de Carnap, amb $^1M, ^2M, ^3M$. 1M designa la relació biargumental entre un valor de la segona i un de la tercera variable, per als quals n'existeix un de la primera, i, semblantment, definirem $^2M, ^3M$.

LÒGICA RELACIONAL

Def. 37.07 ${}^1M = \hat{y} \hat{z} [(E x) \& M(x, y, z)]$.

En les relacions biargumentals $f(x, y)$ només existeix una relació inversa $f(y, x)$; en canvi, per a una relació n argumental existeixen $n! - 1$ relacions diferents de la primera en general, tantes com són les permutacions entre les n variables. Si la relació és triargumental $\varphi(x, y, z)$, tenim cinc noves (en general) relacions, que s'anomenen les *diverses* de φ i es defineixen:

Def. 37.08 $M^{132} = \hat{x} \hat{y} \hat{z} \{M(x, y, z)\}$ (compari's amb 37.01).

Def. 37.09 $M^{213} = \hat{y} \hat{x} \hat{z} \{M(x, y, z)\}$, i definicions anàlogues per a les altres relacions.

En lloc de parlar de la inversa de $f(x, y)$, car només n'hi ha una, aquí hem de considerar la classe de les diverses de $\varphi(x, y, z)$, *Div' M*.

Exemple: $G(x, y, z)$ sigui la relació triargumental « x dóna a y l'objecte z ». Aleshores $D'_1 G$ és la classe dels dadors; $D'_2 G$ és la classe dels que reben; $D'_3 G$ és la classe dels objectes donats i rebuts. $b {}^1G c$ és la relació biargumental derivada de G , això és a saber, b rep c (suposant que existeix un x determinat que dóna); $a {}^2G c$ és una nova relació parcial, derivada de G , a dóna c (suposant que hi ha un que rep); $a {}^3G b$, nova relació parcial derivada de G , a dóna a b (suposant que hi ha un objecte a donar). $\vec{1}G' c$ la classe o conjunt d'individus que reben c ; $\overleftarrow{1}G' b$ el conjunt d'objectes que rep l'individu b ; $\vec{2}G' c$ el conjunt dels donants de c ; $\overleftarrow{2}G' a$, els dons de a ; $\vec{3}G' b$ el conjunt dels individus que donen quelcom a b ; $\overleftarrow{3}G' a$ aquells als quals a dóna quelcom. I d'altres relacions parcials menys importants.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

§ 38

Classes-unitat. Identitat. Classes parell.

Les qüestions que tractarem en els paràgrafs següents són anomenades per Whitehead-Russell, Prolegòmena a l'aritmètica cardinal, car primfien nocions i lleis emprades sobretot en l'aritmètica, encara que tinguin un caràcter estrictament lògic.

En aquest paràgraf estudiarem la identitat, les classes-unitat i les classes-parell.

I. IDENTITAT I DIVERSITAT. — La identitat pot ésser considerada com a funció i com a relació, això és, com a propietat $f(x)$, i com a funció de dues variables $= (x, y)$. En efecte: ésser idèntic amb ell mateix és una propietat de qualsevol objecte, encara que fos únic en l'univers. Però la identitat admet una formulació relacional $= (x, y)$, funció que només donarà una prop. veritable en el cas en què ambdues variables independents siguin el mateix objecte. Considerem-la ara sota aquest nou punt de vista, i definirem:

Def. 38.01 $I = \hat{x} \hat{y} (x = y)$. La identitat és una classe els elements de la qual són tots els parells x, y , que compleixen la funció $x = y$. I, al contrari, la diversitat J comprendrà tots els parells en els quals no es realitzi $x = y$.

Def. 38.02 $J = \div I = \hat{x} \hat{y} (x \neq y)$. ($\neq$ és el signe de no-identitat).

Notem que la relació J és la *negació* de I , però no pas la relació *inversa* de I ; ni I és la inversa de J , com es veurà en els teoremes següents i es dedueix de la definició de la relació inversa.

Teoremes importants:

38.10 $\vdash (x I y) \equiv (x = y)$.

38.11 $\vdash (x \check{I} y) \equiv (y = x)$. Notem la diferència entre $I, \check{I}$.

LÒGICA RELACIONAL

38.12 $\vdash (x J y) \equiv (x \neq y)$.

38.13 $\vdash (x \check{J} y) \equiv (y \neq x)$. Notem la diferència entre $\check{J}$, J .

38.14 $\vdash E! I$. Existeix almenys un objecte que és idèntic amb ell mateix.

38.15 $\vdash I' y = y$. L'únic element que té amb y la relació d'identitat és solament y .

38.16 $\vdash (y) E! I' y$. Per a qualsevol individu y existeix un únic element que és idèntic amb ell.

38.17 $\vdash I'' \alpha = \alpha$. La classe idèntica amb α és la mateixa α .

38.18 $\vdash I = \check{I}$. La inversa d'identitat és identitat.

38.19 $\vdash J = \check{J}$. La inversa de diversitat és diversitat.

38.20 $\vdash R \subset I \equiv \check{R} \subset I$. Si una relació R és un element de la classe de les relacions identitat, la seva inversa també ho serà; v. gr., la igualtat definida entre nombres naturals és una mena d'identitat; doncs la inversa d'aquesta relació també ho serà.

38.21 $\vdash R \subset J \equiv \check{R} \subset J$.

38.22 $\vdash R \subset J \equiv (x) (\overline{x R x})$.

38.23 $\vdash (x) (x I x)$.

38.24 $\vdash (D' I = V) \& (C' I = V)$. La classe dels antecedents de la relació identitat aplega tots els objectes, i el mateix s'esdevé amb la classe dels conseqüents de I .

38.25 $\vdash C' I = V$.

38.26 $\vdash E! J \rightarrow (D' J = V) \& (C' J = V) \& (C' J = V)$. Notem que l'antecedent $E! J$ «hi ha almenys un parell d'elements x, y dins un tipus, per als quals val $x \neq y$ », no és necessàriament veritable; car, segons els monistes, al món no existeix sinó un sol objecte, i, naturalment, per a ell val $x = y$. Si suposem, però $E! J$, en virtut de valer $x \neq y$, val també $y \neq x$, i tots i els mateixos elements (la classe universal) es trobaran en el predomini i en postdomini de J .

38.27 $\vdash R | I = I | R = R$. La relació d'identitat és un mòdul respecte a qualsevol relació.

38.28 $\vdash I^2 = I$. La segona potència d'identitat és, encara, identitat.

38.29 $\vdash (R^2 \subset J) = (R \cap \check{R} = \dot{\wedge})$. Si una relació és del tipus

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

diversitat, no existeixen parells d'elements comuns a la relació directa i a la inversa.

38.30 $\vdash R^2 \subset J \rightarrow R \subset J$. Si la segona potència d'una relació és de tipus diversitat, ho és també la primera. Exemple, la relació $<$: però no val pas la prop. inversa; vegeu 36.37.

38.31 $\vdash (\check{R} \dot{\cap} R = \wedge) \rightarrow (R \subset J)$. Si la relació directa R no té parells comuns amb la seva inversa, $\check{R}$, aquesta relació és de tipus diversitat.

38.32 $\vdash (R^2 \subset R) \rightarrow \{(R \subset J) = (R^2 \subset J) = (R \dot{\cap} \check{R} = \dot{\wedge})\}$.

38.33 $\vdash \alpha \uparrow I = I \uparrow \alpha = \alpha \uparrow I \uparrow \alpha$. Limitar el predomini de la relació d'identitat equival a limitar el postdomini i el camp sencer, car els mateixos elements es troben en totes tres classes.

II. CLASSES-UNITAT.—Introduïm una nova funció objectal $\iota'x$ amb la significació «la classe dels termes idèntics amb x »; el que equival evidentment a «la classe el membre únic de la qual és x ». Aquestes classes s'anomenen classes-unitat. La definició tècnica és:

Def. 38.03 $\iota'x = \hat{y} (y = x) = \hat{y} (y I x) = \vec{I}'x$, o sigui, entre tots els termes (antecedents) que tinguin amb un determinat (consegüent) la relació I , la relació que existeix és la d'unicitat, $\iota'x$.

Podem, doncs, tractar ι com una nova relació que anomenarem unicitat. La seva inversa serà designada amb $\check{\iota}$, i caldrà distingir curosament, amb Peano, entre $\iota'\alpha$, $\check{\iota}'\alpha$: $\iota'\alpha$ és la classe amb un sol element, designat, cercat, mitjançant la relació ι ; $\iota'\alpha$ mena, doncs, de la classe α mitjançant la relació d'unicitat a un sol element, que no anomenem amb nom propi, car $\iota'\alpha$ és una funció descriptiva solament. En canvi, $\check{\iota}'\alpha$ és «l'únic element de la classe», això és, $\check{\iota}'\alpha$ mena, doncs, d'un element únic, original en un ordre, mitjançant la relació d'unicitat, a la seva classe. $\check{\iota}'\alpha$ simbolitza un element original en tant que cercant per a ell mateix, mitjançant la relació d'unicitat, una classe original també a la qual pertànyer. Consegüentment, confondre $\iota'\alpha$ amb $\check{\iota}'\alpha$ equival a confondre els conceptes de classe i individu, de relació directa i inversa.

Segons la teoria de les classes, $\check{\iota}'\alpha$ s'escriu $(\iota x) (x \varepsilon \alpha)$; o bé,

LÒGICA RELACIONAL

$\hat{\imath}' \alpha = \hat{\imath}' x \varphi(x) = (\imath x) \varphi(x)$. Notem que el concepte de classe-unitat o de l'únic element de la classe α no és encara el concepte de nombre cardinal 1. Aviat veurem quines condicions cal afegir-hi.

Teoremes:

38.34 $\vdash (\alpha = \imath' x) \equiv [\alpha = \hat{y} (y = x)]$.

38.35 $\vdash (\alpha = \imath' x) \equiv (y) [y \varepsilon \alpha \rightarrow (y = x)]$.

38.36 $\vdash \mathbf{C}' \imath = V$. Tots els elements d'un tipus poden fer de conseqüents respecte a la relació d'unicitat.

38.37 $x \varepsilon \alpha \equiv \imath' x \mathbf{C} \alpha$. Llei que indica la manera de transformar les relacions diferents ε , $\mathbf{C}$ mútuament amb validesa.

38.38 $\vdash (\alpha \mathbf{C} \imath' x) \equiv [(\alpha = \wedge) \vee (\alpha = \imath' x)]$. Si els elements d'una classe α es troben inclosos en la classe-unitat, això equival a l'afirmació que, o bé α és la classe buida, o bé és idèntica a la classe-unitat. Resumint: la classe-unitat és la classe ínfima, diferent de la classe nulla.

38.39 $\imath' \hat{\imath}' x = x$.

Si formem ara amb totes les classes-unitat una classe superior, de la qual les primeres siguin elements, aquesta nova classe serà una nova entitat lògica, segons la teoria primària dels tipus, i s'anomena «*unitat lògica*», o «nombre lògic 1». Més endavant provarem que és ensems el nombre cardinal 1. La unitat és, doncs, una propietat de propietat. Per a qualsevol classe existeix una funció proposicional de la qual ella és l'extensió. Considerem ara uns quants exemples de funcions proposicionals corresponents a classes-unitat; la qual cosa ens permetrà de treure'n aclariments per a valorar la definició lògica del nombre cardinal 1.

Escriurem, en lloc de $\imath' x$, $\imath' \hat{x} \varphi(x) = (\imath x) (\varphi x)$, que explicita la funció prop. determinadora de l'extensió. Sigui φ_1 la funció prop. o predicat «centre del cercle A »; φ_2 la funció «autor del Faust»; φ_3 el predicat «arrel de $x - 1 = 0$ »; φ_4 el predicat «rei d'Anglaterra», etc., etc., les expressions $\imath' \hat{x} \varphi_1(x)$, $\imath' \hat{x} \varphi_2(x)$, $\imath' \hat{x} \varphi_3(x)$, $\imath' \hat{x} \varphi_4(x)$,..... són funcions objectals que determinen un sol objecte, un únic punt, Goethe, 1, Jordi V; de totes podem predicar un nou atribut, la *unitat*. $\imath' \hat{x} \varphi_2(x)$ és una classe-unitat; no val, però, Goethe és una classe-unitat, ni Goethe, en tant que individu original, únic en el món, és la unitat. La unitat és, doncs, un

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

predicat de segon ordre, un predicat de predicat, que solament convé a les classes-unitat en tant que classes, encara que essent classes-unitat només continguin un sol element; la qual cosa veurem millor amb nombres superiors: «ésser dos» és predicat només de les classes-parell, no pas dels individus; «les mans de l'home són dues». Però la mà dreta no és pas dues; en canvi, respecte al predicat *vivent* podem dir, la mà dreta és vivent. Semblantment, doncs, hem de parlar respecte a la unitat. La unitat, en tant que predicat de segon ordre, en tant que classe de totes les classes-unitat i predicat propi d'elles, no pas de l'únic individu que contenen, es defineix:

Def. 38.04 $1 = \hat{\alpha} \{ (Ex) \& \alpha = \iota' x \}.$

No fem, doncs, cap cercle viciós suposant les *classes-unitat* com a elements per a definir *la unitat*, com varem afirmar alguns filòsofs i matemàtics sense aprofundir la definició logística d'unitat. No diem encara que la unitat definida sigui un nombre cardinal, car aquesta noció serà definida més endavant. Notem que el símbol 1 posseeix l'ambigüitat sistemàtica, car la unitat es defineix com la classe de les classes-unitat. Ara bé: les classes-unitat poden ésser formades amb elements pertanyents als tipus individuals (exemples adduïts), o bé amb classes de classes-unitat, o amb classes de classes de classes-unitat, etc.; i la classe de cada un d'aquests tipus serà una unitat d'ordre superior. No hem definit amb 38.04 sinó la unitat obtinguda com a classe de les classes-unitat, que descriuen directament un individu: és el tipus inferior d'unitat que designariem millor amb $1(x)$, unitat bastida sobre classes-unitat individuals. Siguin ara les funcions o predicats superiors «imperi romà», «imperi anglès», «imperi de Carles V»....., són predicats o funcions descriptives singulars. Els individus pertanyen directament a classes que no són del tipus unitat, v. gr., a les ciutats. Ciutat és un predicat de segon ordre, però no sempre mena a una classe-unitat. Les ciutats són elements d'una classe superior, posem d'una regió autònoma. Regió autònoma és un predicat de tercer ordre, però no mena sempre a una classe-unitat. Un aplec de regions autònomes forma una nació. El predicat nació així obtingut és de quart ordre, però encara no fa sempre

LÒGICA RELACIONAL

una classe-unitat, car existeixen estats formats de nacions federades: en canvi, el predicat *imperi*, o república federal, mena a *classe-unitat*. V. gr.: imperi romà, anglès, el de Carles V, etc. Totes són classes-unitat: per tant, la classe d'aquestes classes-unitat és una unitat d'ordre superior a la unitat formada amb classes-unitat basades en els individus. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ són classes-unitat d'ordre cada una superior a l'anterior, α_1 , classe-unitat individual; α_2 classe de classes-unitat individual; α_3 classe de classes de classes de classes-unitat individual..... hauríem d'introduir nous tipus corresponents d'unitat: 1 (α_1), 1 (α_2), 1 (α_3)..... Amb tot, per la teoria de l'extensionalitat sabem que tots aquests tipus superiors es redueixen a l'ínfim, quant a propietats. No cal, doncs, bastir una lògica ni matemàtiques especials per a cada tipus. Aquest resultat, però, demana una tesi especial ja tractada, la de l'extensionalitat, i sense ella és una falta de lògica tractar amb les mateixes lleis les diverses classes d'unitat, encara que el llenguatge empri la mateixa paraula, o predicat, per a subjectes (classes-unitat) d'ordres diferents.

Teoremes importants:

38.40 $\vdash \alpha \varepsilon 1 \equiv \{ (E x) \& (y) [(y \varepsilon \alpha) \equiv (y = x)] \}$. Que una classe α pertanyi a la categoria de classe-unitat, equival a dir que existeix en α almenys un individu x , i que afirmar que un altre y pertany a la mateixa classe α , és el mateix que afirmar que y és idèntic a x .

38.41 $\vdash 1 = D' \iota$. La unitat és l'antecedent de la relació unicitat.

38.42 $\vdash \alpha \varepsilon 1 \rightarrow \{ [E ! (\alpha \cap \beta)] \equiv [(\alpha \cap \beta) \subset 1] \}$. Si α és una classe-unitat, es dedueix que la classe formada dels elements comuns a α, β també és una classe-unitat, això és, el nombre 1 no té amb els nombres superiors 2, 3..... altres elements comuns que una unitat.

38.43 $\vdash (\alpha, \beta \varepsilon 1) \& (\alpha \neq \beta) \rightarrow (\alpha \cap \beta = \wedge)$. Si α, β són classes-unitat i ensems no són idèntiques, no tenen cap element comú, o bé l'únic element comú és la classe nulla.

Noteu que escrivim $\alpha \varepsilon 1$ i no $\alpha \subset 1$; car α és element de la

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

classe superior 1: en canvi, la notació $\alpha \mathbf{C} \beta$ suposa que α , β són del mateix tipus. La mateixa advertència per a $\alpha \in 2$.

III. CLASSES-PARELL. — Al costat de les classes-unitat existeixen classes-parell, classes amb dos elements solament o, si volem, funcions proposicionals que determinen una extensió integrada de dos elements únicament. V. gr.: les funcions prop. «focus de l'el·lipse», «pols de la terra», «mà de l'home», etc., són funcions prop. que determinen dos elements solament. Menen a classes-parell, o, simplement, parell. Existeixen dues classes de parells, «parells anordenats» (sense ordre; no diem inordenats), i «parells ordenats». La manera més senzilla de definir un parell anordenat és aplicar l'operació $\cup$ a dues classes-unitat, $t'x \cup t'y$. Aleshores formem una funció objectal que descriu un parell. V. gr., «El pol nord de la terra i el pol sud», «L'autor del Faust i l'autor de Lo Somni», etc., s'anomenen parells anordenats, car la unió $\cup$ posseeix la propietat commutativa. Parell ordenat es definirà $t'x \uparrow t'y$, recordant que $\uparrow$ és símbol d'una relació entre x , y , amb l'ordre determinat per la mateixa relació. Com que la notació anterior és massa complicada, escriurem, en lloc de $t'x \uparrow t'y$, $x \downarrow y$. A la manera que les classes-unitat menaven a la unitat, la classe dels parells anordenats és el nombre cardinal 2, i la classe dels parells ordenats és el nombre ordinal 2 (signe 2_r). Per ara ens acontentem amb el concepte lògic de 2 i 2_r , sense definir els conceptes de nombre cardinal i de nombre ordinal.

Hem d'introduir un altre nombre lògic (cardinal), el zero, 0, que sota el punt de vista de les seves propietats lògiques (deixant de banda les aritmètiques), es defineix per $t' \wedge$. El zero és l'element únic de les classes nul·les. Una classe nul·la correspon a l'extensió de determinades funcions prop. Per exemple: « x es mou amb velocitat major que la de la llum» (suposant, amb la teoria de la relativitat, que això és irreal en el món actual, encara que possible absolutament); « x es troba en el segon focus de l'el·lipse amb el sol», « x és un centaure»..... Cal, doncs, no confondre classe nul·la amb classe contradictòria, malgrat que aquestes siguin necessàriament i sempre buides. La classe, doncs, de les classes nul·les és el zero; que és predicat comú de totes elles.

LÒGICA RELACIONAL

Les definicions correctes són:

Def. 38.05 $0 = \iota' \wedge$.

Def. 38.06 $2 = \hat{\alpha} \{ (E x, y) \ \& \ x \neq y \ \& \ (\alpha = \iota' x \cup \iota' y) \}$.

Teoremes:

38.44 $\vdash (\iota' x \cup \iota' y) \varepsilon 1 \equiv (x = y)$.

38.45 $\vdash (\iota' x \cup \iota' y) \varepsilon 2 \equiv (x \neq y)$.

38.46 $\vdash 2 = \hat{\alpha} \{ (E x) \ \& \ x \varepsilon \alpha \ \& \ (\alpha - \iota' x) \varepsilon 1 \}$. El 2 és un nombre tal, que, si li traiem una classe-unitat, la classe que resta és una classe-unitat.

38.47 $\vdash \alpha \varepsilon 2 \rightarrow \{ (\beta \subset \alpha) \rightarrow \beta \varepsilon (0 \vee 1 \vee 2) \}$. Si α pertany a la classe 2, es dedueix que si la classe β es troba inclosa en la α , és o la classe nul·la o la classe-unitat, o la classe-parell. Resumint: un parell inclou com a classes parcials 0, 1, 2.

38.48 $\vdash (\alpha, \beta \varepsilon 1) \rightarrow \{ (\alpha \cap \beta = \wedge) \equiv (\alpha \cup \beta \varepsilon 2) \}$. «Si α, β són classes-unitat, podem concloure que si α, β no tenen cap element comú, llur unió per $\cup$ dona una classe-parell.» D'on deduirem, després de definir l'addició aritmètica en termes lògics, que $1 + 1 = 2$.

38.49 $\vdash \alpha \varepsilon 2 = (x) (y) \{ [(x, y) \varepsilon \alpha \ \& \ (x \neq y) \rightarrow (\alpha = \iota' x \cup \iota' y)] \ \& \ (E x, y) [(x, y \varepsilon \alpha) \ \& \ (x \neq y)] \}$. Teorema que assegura que qualsevol classe-parell no posseeix més de 2 elements ni menys de dos.

38.50 $\vdash \alpha \varepsilon (0 \vee 1 \vee 2) \equiv (E x, y, z) (x, y, z \varepsilon \alpha \ \& \ x \neq y \ \& \ x \neq z \ \& \ y \neq z)$.

En virtut d'aquest teorema, una classe que no sigui ni la classe nul·la, ni la classe-unitat ni la parell, conté almenys tres elements distints. D'això deduirem en aritmètica que un nombre cardinal diferent de 0, 1, 2 és igual o major que 3; la qual cosa mena a un teorema existencial d'importància cabdal en aritmètica.

Considerem ara els parells ordenats i el nombre lògic 2_r.

Def. 38.07 $x \downarrow y = \iota' x \uparrow \iota' y$.

Teoremes:

38.51 $\vdash (D' R = \iota' x) \ \& \ (D' R = \iota' y) \equiv (R = x \uparrow y)$. Si el predomini d'una relació R està format d'un sol element x , i el seu

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

postdomini d'un únic y , aquesta relació és del tipus de parell ordenat, això és, d'una relació feta només per ordenar un parell d'elements. Anomenem aquesta relació biindividual (distingir de relació biargumental); la qual cosa permet de demostrar:

38.52 $\vdash x \downarrow y = \hat{r}' \hat{R} (\mathbf{D}' \hat{R} = \iota' x \ \& \ \mathbf{Q}' R = \iota' y)$. La relació biindividual és element d'aquella classe de relacions $\hat{r}' \hat{R}$, en les quals el predomini és $\iota' x$ i el postdomini $\iota' y$.

38.53 $\vdash [(x \downarrow y) = (x \downarrow z)]^3 \equiv (y = z)$.

38.54 $\vdash (x \neq y) \equiv [(x \downarrow y) \in \mathbf{J}]$. Si x , y , són diferents, una relació biindividual que els uneixi serà del tipus diversitat.

Els parells ordenats o relacions biindividuales fan d'elements d'una classe superior, que serà una classe de relacions. La classe dels parells ordenats s'anomena «nombre ordinal lògic 2_r » (r fa referència a l'estructura relacional del parell). 2_r és una classe de relacions com a elements; escriurem, doncs, $R \in 2_r$ per a indicar que R és del tipus relació biindividual o bé per a fixar quines condicions ha d'emplenar una relació R per tal d'ésser element de la classe 2_r .

Def. **38.08** $2_r = \hat{R} \{ (E x, y) (x \neq y) \ \& \ (R = x \downarrow y) \}$.

Teoremes:

38.55 $0_r = \iota' \wedge$. El zero relacional és l'element de les relacions nulles. Notem ara una altra finor logística: una classe nulla pot venir d'una funció prop. uniargumental (exemples adduïts en explicar $\iota' \wedge$). Es troben, però, funcions prop. biargumentals (relacions) que menen també a relacions nulles, a un parell buit. V. gr.: «La velocitat $3c$ del cos A és major que la velocitat $2c$ del cos B » (c la velocitat de la llum); « x és pare de y », que mena a un parell buit dins la relació «pare de» si en lloc de y posem l'individu descrit per la funció objectal «el pare d'Adam». Conseqüentment, la classe de relacions buides (siguin buides necessàriament o solament de fet) ha de menar a un zero relacional, 0_r , diferent del 0 cardinal definit.

38.56 $\vdash R \in 2_r \equiv (E x, y) \ \& \ (x \neq y) \ \& \ (R = x \downarrow y)$.

38.57 $\vdash R \in 2_r \equiv (\mathbf{D}' R, \mathbf{Q}' R \in 1) \ \& \ (\mathbf{D}' R \cap \mathbf{Q}' R = \wedge)$. Si

LÒGICA RELACIONAL

una relació R és biindividual, el seu pre i postdomini són classes-unitat sense element comú, fora de la classe nulla.

$$38.58 \quad \vdash R \varepsilon 2_r \equiv (D' R, \mathbf{d}' R \varepsilon 1) \ \& \ (C' R \varepsilon 2).$$

$$38.59 \quad \vdash R \varepsilon 2_r \equiv [C' R \varepsilon 2 \ \& \ (R \cap \check{R} = \dot{\wedge})].$$

§ 39

Subclasses i subrelacions

Per a l'estudi pregon de l'estructura interna de les classes i relacions posseeix una importància cabdal considerar les subclasses i subrelacions. La teoria lògica de l'axioma de Zermelo es basa en les proposicions i definicions següents:

I. SUBCLASSES. — En el § 30 vàrem definir $Cl' \alpha$ i $Cl ex' \alpha$. Ara eixamplem ambdues definicions per a qualsevol classe, amb la qual cosa haurem definit els símbols mateixos Cl i $Cl ex$, prescindint de llur aplicació a una classe determinada α :

Def. 39.01 $Cl = \hat{x} \hat{\alpha} \{x = \hat{\beta} (\beta \subset \alpha)\}$. I si excloem la classe nulla,

Def. 39.02 $Cl ex = \hat{x} \hat{\alpha} \{x = \hat{\beta} (\beta \subset \alpha) \ \& \ E! \beta\}$. Si α és una classe determinada amb n elements, el nombre total de subclasses incloses en ella és 2^n : per tant, el nombre de subclasses d'una classe determinada és sempre major que el nombre d'elements de la mateixa classe. $Cl' \alpha$ és una funció objectal. La segona definició $Cl ex' \alpha$ s'emptra en l'axioma de Zermelo: «Per a qualsevol classe α existeix una relació (selectiva) R tal, que si β és una subclasse no buida de α , $R' \beta$ existeix i pertany a β (és a dir, que existeix un sol element privilegiat dins β , el representant de β)», això és:

$(E R) (\beta) \{(\beta \varepsilon Cl ex') \rightarrow (R' \beta \varepsilon \beta)\}$. La importància per a la teoria dels conjunts d'aquest axioma o del seu equivalent, l'axioma multiplicatiu, és prou coneguda en matemàtiques. En tractarem més endavant sota el punt de vista lògic.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Def. 39.03 $Cls^2 = Cl' Cls$. Cls^2 és el símbol propi d'una classe els elements de la qual siguin classes Cl . Cls^2 és una classe de segon ordre.

Def. 39.04 $Cls^3 = Cl' Cls^2$. Cls^3 és una classe de classes de classes; i noteu que emprem funcions descriptives.

Teoremes:

39.11 $\vdash Cl' \alpha = \hat{\beta} (\beta C \alpha)$.

39.12 $\vdash Cl ex' \alpha = \hat{\beta} (\beta C \alpha \& E! \beta)$.

39.13 $\vdash \beta \in Cl' \alpha = \beta C \alpha$.

39.14 $\vdash \beta \in Cl' ex' \alpha = (\beta C \alpha) \& E! \beta$.

39.15 $\vdash Cl ex' \alpha = Cl' \alpha - \iota' \wedge$.

39.16 $\vdash \wedge \in Cl' \alpha$. La classe nulla està continguda en $Cl' \alpha$: obtindrem, doncs, $Cl ex' \alpha$, segons el teorema anterior, traient, mitjançant l'operació $-$, la classe nulla $\iota' \wedge$.

39.17 $\vdash Cl' \wedge = \iota' \wedge$. Les subclasses de la classe nulla són la mateixa classe nulla.

39.18 $\vdash \alpha \in Cl' \alpha$. α és subclasse d'ella mateixa.

39.19 $\vdash \alpha \in 1 \rightarrow (Cl' \alpha C 0 \vee 1)$. Si la classe α és un element de la classe-unitat, se'n dedueix que les subclasses de α seran 0, o bé 1.

39.20 $\vdash \alpha \in 2 \rightarrow (Cl' \alpha C 0 \vee 1 \vee 2)$.

39.21 $\vdash (\beta \in Cl' \alpha \& \gamma C \beta) \rightarrow (\gamma \in Cl' \alpha)$. Les subclasses de β estan incloses entre les de α , si β mateixa és una classe de α . Propietat transitiva.

39.22 $\vdash \beta, \gamma \in Cl' \alpha = \beta \cup \gamma \in Cl' \alpha$. Si β, γ individualment són classes dins α , llur suma també ho serà.

39.23 $s' Cl' \alpha = \alpha$. Amb tots els elements nous de totes les subclasses de α es forma una classe s' (la suma conjuntual) que és idèntica a la mateixa α .

39.24 $s' Cl' ex' \alpha = \alpha$.

39.25 $p' Cl' \alpha = \wedge$. El producte conjuntual de totes les subclasses de α , o sigui la classe aplegadora dels elements comuns a totes les subclasses de α , és la classe nulla, car, segons 39.16, es troba dins qualsevol classe o subclasse, i solament ella és una classe comuna a totes les parcials.

39.26 $\vdash (Cl' \alpha = Cl' \beta) = (\alpha = \beta)$. Si les subclasses de dues

LÒGICA RELACIONAL

classes α , β són idèntiques, ho són elles mateixes (identitat de les parts a identitat del tot). I llei semblant per a *Cl ex'*.

39.27 $\vdash Cl' \alpha \in Cls^2$. La classe de totes les subclasses de α és una classe de segon ordre.

II. SUBRELACIONS. — Eixamplant de manera semblant les definicions 31.012, 013, obtindrem:

Def. **39.05** $Rl = \hat{\lambda} \hat{P} \{ \lambda = \hat{R} (R \subset P) \}$.

Def. **39.06** $Rlex = \hat{\lambda} \hat{P} \{ \lambda = \hat{R} (R \subset P) \ \& \ \dot{E}! R \}$.

I valen els teoremes corresponents als anteriors; enumerem els més notables.

Teoremes:

39.28 $\vdash \dot{\lambda} \in Rl' P$. La relació nulla és sempre subrelació d'una relació P .

39.29 $\vdash Rl' \dot{\lambda} = \iota' \dot{\lambda}$. La relació nulla no té altres subrelacions que ella mateixa.

39.30 $\vdash (R \in 2_r) \rightarrow (Rl' P \subset 0_r \cup 2_r)$. Si una relació R és del tipus parell ordenat, les seves subrelacions seran o bé de la categoria zero relacional, o bé parell ordenat.

39.31 $\vdash (Rl' P = Rl' Q) = (P = Q)$.

Finalment, uns teoremes sobre les subrelacions contingudes en les relacions d'identitat i diversitat.

39.312 $\vdash P \in Rl' J \equiv \check{P} \in Rl' J$.

39.313 $\vdash P \in Rl' J \rightarrow C' P \bar{\varepsilon} 1$.

39.314 $\vdash \dot{\lambda} \in Rl' J$.

39.315 $\vdash P \subset J \rightarrow P \upharpoonright \alpha \subset J$.

39.316 $\vdash (P \subset J \ \& \ \alpha \in 1) \rightarrow (P \upharpoonright \alpha = \dot{\lambda})$.

39.317 $\vdash P^2 \subset J \rightarrow P \subset J$.

39.318 $\vdash Rl' I \subset Tr$.

III. LES RELACIONS DELS MEMBRES D'UNA CLASSE AMB ELLA MATEIXA. — En el § 26 varem definir $x \in \alpha$ mitjançant una funció prop. uniargumental Def. $x \in \alpha = F(x)$. Ara que hem bastit la

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

teoria de les relacions, podem definir ε relacionalment, com a la relació que diu un element x amb la seva classe, sempre que valgui $x \varepsilon \alpha$, o la prop. corresponent $F(x)$. A aquest canvi de significació hauria de correspondre un nou signe, v. gr., ε' amb la definició

Def. 39.07 $\varepsilon' = x \hat{\alpha} (x \varepsilon a)$. Però no cal pas emprar-lo, puix que es demostra deductivament (i ho diu el mateix discurs formal) que $x \varepsilon' \alpha \equiv x \varepsilon \alpha$: això és, la relació especial (ε') d'un membre x amb la seva classe α , és la d'ésser-ne element (ε).

El tractament relacional de ε posseeix una gran importància per a la teoria de les relacions selectives, les quals determinen dins una classe un element distingit, amb una relació original respecte a la classe total. Aquestes relacions són subrelacions de ε : per això convé de definir ε relacionalment. La teoria lògica de l'axioma de Zermelo en fa un ús continu.

Teoremes importants:

39.32 $\vdash \overrightarrow{\varepsilon'} \alpha = \alpha$. La classe dels antecedents de la classe α , i que pertanyen a ella, és la mateixa classe α .

39.33 $\vdash D' \varepsilon = V$. El predomini o classe dels antecedents de la relació ε (que no restringim com en el teorema precedent a la classe α) és la classe universal; car qualsevol classe pot esdevenir element d'una altra classe. En canvi:

39.34 $\vdash C' \varepsilon = Cls - \iota' \wedge$, car la classe nul·la no pot fer de conseqüent de la relació general, per tal com si $\iota' \wedge$ es troba dins qualsevol classe, no val pas la inversa.

39.35 $\vdash \varepsilon | \tilde{\varepsilon} = V$. La relació $\varepsilon | \tilde{\varepsilon}$ és una relació universal. En efecte: és la relació d'identitat de qualsevol objecte amb ell mateix.

39.36 $\vdash \varepsilon \upharpoonright x = x \hat{\alpha} (x \varepsilon \alpha \ \& \ \alpha \varepsilon x)$. Notem que $\varepsilon \upharpoonright x$ és una relació, la mateixa ε limitada en el postdomini a una classe de classes x . Aquesta relació $\varepsilon \upharpoonright x$ s'empra molt en aritmètica, en el problema de triar un element de cada una de les subclasses $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ contingudes en x . Aquesta tria es fa mitjançant relacions especials (relacions selectives), i totes han de trobar-se contingudes en la ε .

LÒGICA RELACIONAL

39.37 $\vdash R \subset \varepsilon \equiv (\alpha) \overrightarrow{R'} \alpha \subset \alpha$. Condició perquè R sigui una relació del tipus ε .

39.38 $\vdash \exists C \varepsilon$. La relació de l'individu únic amb la seva classe-unitat és una relació ε .

§ 40

Les relacions uniplurívokes, pluriunívokes i biunívokes

Aquestes tres classes de relacions són d'una importància cabdal per a les matemàtiques. Es troben, tanmateix, en totes les ciències; pertany, doncs, a la lògica d'assenyalar llurs lleis generals, independents del contingut significatiu propi amb què les amaren i sadollen les ciències no formals.

I. DEFINICIONS GENERALS. — Una relació s'anomena uniplurívoca (einmehrdeutig, one-many relation) si essent y un membre qualsevol dels conseqüents de R , això és, de $\mathbf{Q}' R$, existeix sempre un sol x , dins el predomini, $\mathbf{D}' R$, que posseeix amb y la relació R .

En altres paraules: per a qualsevol y , val $\overrightarrow{R'} y \varepsilon 1$; «la classe del predomini és la classe-unitat». Així, la relació «pare de» és uniplurívoca; per a cada fill existeix sempre un sol pare. En àlgebra la relació «quadrat de x » és uniplurívoca, car per a cada valor de x (positiu o negatiu) correspon un sol nombre, «el quadrat de x ». La funció sin x és del mateix tipus: per a cada valor de x n'existeix un sol de sinus. Designem amb $(1 \rightarrow Cls)$ les relacions uniplurívokes: si R és una relació d'aquesta mena i $y \varepsilon \mathbf{Q}' R$, existeix sempre la funció uniobjectal $R' y$, per a qualsevol y ; de manera que podem escriure: $R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \equiv (y) (y \varepsilon \mathbf{Q}' R \rightarrow E! R' y)$. Segons això, són funcions uniplurívokes les funcions objectals Inv , $\mathbf{D}$,

$\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$, $\overrightarrow{R}$, $\overleftarrow{R}$, $\dot{p}$, $\ddot{s}$, p , s , Rl , Cl . Si R és una funció uniplurívoca, $R' y$ és una funció uniobjectal; i, inversament, qualsevol funció uniobjectal pot ésser deduïda d'una relació uniplurívoca.

Una relació s'anomena pluriunívoca (mehreindeutig, many-one

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

relation) si essent x un membre del predomini de R , això és de $D' R$, existeix un sol consegüent y , que té amb x la relació R ; en altres termes, $\overleftarrow{R'} x \in 1$. Segons això, és clar que les relacions pluriunívokes són les inverses de les uniplurívokes, v. gr., la d'arc sin x , a un sol consegüent corresponen molts d'antecedents. El símbol propi d'aquestes relacions serà ($Cls \rightarrow 1$).

Finalment, una relació s'anomena biunívoca (eineindeutig, one-one relation) si és alhora uniplurívoca i pluriunívoca; o bé una relació i la seva inversa són uniplurívokes. En són exemples la relació «quadrat d'un nombre positiu», «la inversa de R », ι , $\tilde{\iota}$, Cl , Rl ; en els països cristians la relació de « x casat amb y ». Signe propi ($1 \rightarrow 1$).

Nota: Per tal com entre signes de classes, α , β , δ , γ , 1 , 2 Cls , 0 ,.... mai no s'empra $\rightarrow$, no donarà lloc a confusió servir-se'n, al costat del mateix signe significant implicació. Naturalment que en ($1 \rightarrow 1$), ($1 \rightarrow Cls$) i ($Cls \rightarrow 1$), el signe $\rightarrow$ no significa implicació.

Definim ara una nova noció: dues classes α , β s'anomenen similars si existeix una relació biunívoca R tal com $D' R = \alpha$ i $D' R = \beta$, o sigui, si és possible de relacionar llurs elements de manera que *un* d'una classe s'uneixi amb *un* sol de l'altra, i inversament: sense ometre ni repetir cap d'ells. Aleshores escriurem $\alpha sm \beta$ (*sm*, abreviació de similis), i llegirem: « α és similar a β ». Veurem que quan dues classes α , β són similars posseeixen el mateix nombre cardinal. De la qual cosa prové la importància cabdal, per a l'aritmètica, de les relacions biunívokes.

La condició lògica d'una relació pluriunívoca és

$$(y) (y \in D' R \rightarrow \overrightarrow{R'} y \in 1),$$

això és:

$$R'' D' R \subset 1;$$

i semblantment per a una relació uniplurívoca,

$$R'' D' R \subset 1.$$

I una de biunívoca emplenarà alhora ambdues condicions.

Per a generalitzar, podem definir les relacions $Cls \rightarrow 1$, $1 \rightarrow Cls$, $1 \rightarrow 1$, com a casos particulars de relacions entre classes α , β que

LÒGICA RELACIONAL

emplenen les condicions, $(\vec{R}'' \mathbf{Q}' R \subset \alpha) \& (\overleftarrow{R}'' \mathbf{D}' R \subset \beta)$, si la classe dels consegüents de la relació R es troba dins α , i la dels antecedents dins β , aleshores entre alguns elements (almenys) de les classes α , β , es dona la relació R . Considerem, però, totes les relacions que compleixen les condicions imposades al pre i al postdomini de R , i podrem parlar en general de la relació entre α , β . Aleshores definirem:

Def. 40.01 $\alpha \rightarrow \beta = \hat{R} \{ (\vec{R}'' \mathbf{Q}' R \subset \alpha) \& (\overleftarrow{R}'' \mathbf{D}' R \subset \beta) \}$.

De la qual cosa, sense cap nova definició, obtenim $1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow Cls$, $Cls \rightarrow 1$. En lloc de Cls podem posar qualsevol amb dos, tres o més elements.

Els teoremes més importants són:

40.10 $\vdash R \varepsilon (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\vec{R}'' \mathbf{Q}' R \subset \alpha) \& (\overleftarrow{R}'' \mathbf{D}' R \subset \beta)$.

40.11 $\vdash R \varepsilon (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\gamma) (\gamma \varepsilon \mathbf{Q}' R \rightarrow \vec{R}' \gamma \varepsilon \alpha) \& (x) (x \varepsilon \mathbf{D}' R \rightarrow \overleftarrow{R}' x \varepsilon \beta)$.

Dues formulacions de les condicions exigides per tal que R sigui una relació del tipus $\alpha \rightarrow \beta$. Llegim la segona: que una relació R pertanyi al tipus $\alpha \rightarrow \beta$ equival a afirmar que, per a qualsevol γ que es trobi dins el postdomini de R , la classe dels seus antecedents es troba inclosa en α , i ensems que, per a qualsevol x que es trobi en el predomini de R , la classe dels consegüents de x , segons R , es troba dins β .

40.12 $\vdash \beta \rightarrow \alpha = Inv'' (\alpha \rightarrow \beta)$.

40.13 $\vdash (\alpha \subset \gamma \& \beta \subset \delta) \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \subset (\gamma \rightarrow \delta)]$.

40.14 $\vdash (\alpha \rightarrow Cls) = \hat{R} (\vec{R}'' \mathbf{Q}' R \subset \alpha)$.

40.15 $\vdash (Cls \rightarrow \beta) = \hat{R} (\overleftarrow{R}'' \mathbf{D}' R \subset \beta)$.

40.16 $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) = (\alpha \rightarrow Cls) \cap (Cls \rightarrow \beta)$.

II. LLEIS ESPECIALS PER A $1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow Cls$, $Cls \rightarrow 1$. — Quant a la representació gràfica, notem que en una relació uniplurívoca de cada punt només surt un vector, i tots aquests vectors menen a un sol objecte, a un sol punt $\vec{R}' y \varepsilon 1$ (relació dels fills *al* pare). En una relació pluriniúnívoca a cada punt es dirigeix només un

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

vector, encara que d'un mateix punt en surtin molts (relació d'un pare a cada un dels seus fills). En una relació biunívoca solament existeixen parells deslligats de punts units amb un vector doble (relació directa i inversa), si el pre i el postdomini no tenen elements comuns. Si un mateix element pertany a ambdós dominis posseirà un vector circular.

Relació uniplurívoca

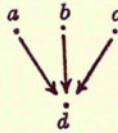


Fig. 7

Relació pluriumívoca

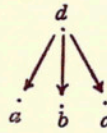


Fig. 8

Relació biunívoca

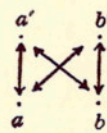
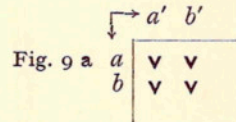
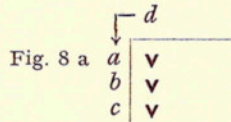
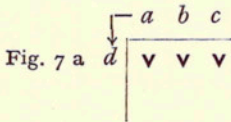


Fig. 9

L'esquema matricial serà: en una relació uniplurívoca, cada columna només té un lloc ocupat; en una pluriumívoca, només és ple un lloc a cada línia; en una biunívoca, totes les columnes i línies. Fem els esquemes matricials corresponents als tres vectorials:



Teoremes:

$$40.17 \quad \vdash 1 \rightarrow Cls = \hat{R} (\vec{R}'' \mathbf{Q}' R \mathbf{C} 1).$$

$$40.18 \quad \vdash Cls \rightarrow 1 = \hat{R} (\overleftarrow{R}'' \mathbf{D}' R \mathbf{C} 1).$$

$$40.19 \quad \vdash 1 \rightarrow 1 = \hat{R} (\vec{R}'' \mathbf{Q}' R \mathbf{C} 1) \& (\overleftarrow{R}'' \mathbf{D}' R \mathbf{C} 1).$$

$$40.20 \quad \vdash 1 \rightarrow 1 = (1 \rightarrow Cls) \cap (Cls \rightarrow 1).$$

$$40.21 \quad \vdash R \in (1 \rightarrow Cls) \equiv \vec{R}'' \mathbf{Q}' R \mathbf{C} 1.$$

$$40.22 \quad \vdash R \in (Cls \rightarrow 1) \equiv \overleftarrow{R}'' \mathbf{D}' R \mathbf{C} 1.$$

$$40.23 \quad \vdash R \in (1 \rightarrow 1) \equiv (\vec{R}'' \mathbf{Q}' R \mathbf{C} 1) \& (\overleftarrow{R}'' \mathbf{D}' R \mathbf{C} 1).$$

$$40.24 \quad \vdash R \in (1 \rightarrow 1) \equiv R \in [(1 \rightarrow Cls) \& (Cls \rightarrow 1)].$$

$$40.25 \quad \vdash R \in (1 \rightarrow Cls) \equiv (y) (E! \vec{R}' y \rightarrow \vec{R}' y \in 1).$$

LÒGICA RELACIONAL

- 40.26 $\vdash R \varepsilon (Cls \rightarrow 1) \equiv (x) (E! \overleftarrow{R'} x \rightarrow \overleftarrow{R'} x \varepsilon 1).$
- 40.27 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow 1) \equiv (y) (E! \overrightarrow{R'} y \rightarrow \overrightarrow{R'} y \varepsilon 1) \ \& \ (x) (E! \overleftarrow{R'} x \rightarrow \overleftarrow{R'} x \varepsilon 1).$
- 40.28 $\vdash (y) E! R' y \rightarrow R \varepsilon (1 \rightarrow Cls).$
- 40.29 $\vdash (x) E! \check{R'} x \rightarrow R \varepsilon (Cls \rightarrow 1).$
- 40.30 $\vdash (y) (E! R' y) \ \& \ (x) (E! \check{R'} x) \rightarrow R \varepsilon (1 \rightarrow 1).$
- 40.31 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \equiv (x, y, z) (x R z \ \& \ x R z) \rightarrow (x = y).$
- 40.32 $\vdash R \varepsilon (Cls \rightarrow 1) \equiv (x, y, z) (x R y \ \& \ x R z) \rightarrow (y = z).$
- 40.33 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow 1) \equiv (x, y, z) [(x R z \ \& \ y R z) \rightarrow (x = y)] \ \& \ [(x R y \ \& \ x R z) \rightarrow (y = z)].$
- 40.34 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \equiv (\check{R} | R = I \uparrow \mathbf{D}' R).$
- 40.35 $\vdash R \varepsilon (Cls \rightarrow 1) \equiv (\check{R} | R = I \uparrow \mathbf{D}' R).$
- 40.36 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow 1) \equiv (R | \check{R} = I \uparrow \mathbf{D}' R) \ \& \ (\check{R} | R = I \uparrow \mathbf{D}' R).$

Aquestes tres darreres lleis són molt interessants: la 40.34 diu que en una relació uniplurívoca, la relació d'identitat es troba limitada al camp dels antecedents; car, en efecte, en elles l'antecedent és únic. La 30.34 afirma que en les pluriunívokes la identitat es troba limitada dins la classe dels consegüents, puix que el consegüent és únic. En realitat, les relacions $R | \check{R}$, $\check{R} | R$ menen a un sol terme. Ambdós casos es realitzen alhora en les biunívokes.

- 40.361 $\vdash Cls \rightarrow 1 = Inv'' (1 \rightarrow Cls).$
- 40.362 $\vdash 1 \rightarrow Cls = Inv'' (Cls \rightarrow 1).$
- 40.363 $\vdash 1 \rightarrow 1 = Inv'' (1 \rightarrow 1).$

La inversa d'una relació pluriunívoca és uniplurívoca, i vice-versa: les inverses de relacions biunívokes també ho són.

- 40.364 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \equiv \check{R} \varepsilon (Cls \rightarrow 1).$
- 40.365 $\vdash R \varepsilon (Cls \rightarrow 1) \equiv \check{R} \varepsilon (1 \rightarrow Cls).$
- 40.366 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow 1) \equiv \check{R} \varepsilon (1 \rightarrow 1).$
- 40.38 $\vdash [R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \ \& \ S \in R] \rightarrow S \varepsilon (1 \rightarrow Cls);$ i lleis semblants per a $R \varepsilon (Cls \rightarrow 1)$ i $R \varepsilon (1 \rightarrow 1)$, que ens diuen que la propietat d'una relació d'ésser dels tipus indicats es conserva en les

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

seves subrelacions; la qual cosa val per a Rl' , per a la classe sencera de totes les relacions parcials.

40.39 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \rightarrow [Rl' R C (1 \rightarrow Cls)].$

40.40 $\vdash R \varepsilon (Cls \rightarrow 1) \rightarrow [Rl' R C (Cls \rightarrow 1)].$

40.41 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow 1) \rightarrow [Rl' R C (1 \rightarrow 1)].$

40.42 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \rightarrow [R \dot{\cap} S C (1 \rightarrow Cls)].$

40.43 $\vdash R \varepsilon (Cls \rightarrow 1) \rightarrow [R \dot{\cap} S C (Cls \rightarrow 1)].$ I, semblantment, per a $R \varepsilon (1 \rightarrow 1).$

40.431 $\vdash [R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \ \& \ S \varepsilon (Cls \rightarrow 1)] \rightarrow [R \dot{\cap} S \varepsilon (1 \rightarrow 1)].$

40.44 $\vdash R, S \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \rightarrow R | S \varepsilon (1 \rightarrow Cls).$ I lleis anàlogues per a les altres menes de relacions tractades. El producte relacional no altera gens ni mica el caràcter de les relacions que hem estudiat, i el mateix s'esdevé amb l'operació $\dot{\cap}.$

40.45 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \rightarrow R \vdash \gamma \varepsilon (1 \rightarrow Cls).$

40.46 $\vdash R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \rightarrow \beta \uparrow R \vdash \gamma \varepsilon (1 \rightarrow Cls).$ I lleis semblants per a les altres dues classes de relacions; la qual cosa ens indica que l'operació limitació del pre i postdomini, o d'ambdós alhora, no altera aquests tipus de relació.

Classifiquem, segons aquests tipus, les relacions estudiades:

Tipus $1 \rightarrow 1$

$\dot{\wedge}$: *Inv*: *sg*, *gs*, *I*, *ι*, *ι*, *Cl*, *Rl*, *Cl ex*, *Rl ex*.

Tipus $(1 \rightarrow Cls)$

$\overrightarrow{R}, \overleftarrow{R}, D, d, C, p, s, \dot{p}, \dot{s}.$

§ 41

El principi d'abstracció relacional

Per tal com aquesta introducció s'adreça, no solament als matemàtics, sinó als filòsofs, tractarem ací, seguint Carnap, la teoria relacional de l'abstracció.

Distingirem entre relacions de similitud i relacions d'igualtat; car ambdues menen a conceptes de caire universal, a entitats abstractes universalistes.

LÒGICA RELACIONAL

Una relació simètrica i reflexiva mena a una *similitud*: entenent per similitud, una igualtat aproximada, una semblança que no arriba a igualtat absoluta, sinó que les diversitats es troben dins de límits estrets. Exemple: la semblança quant a color, quant a alçària. Aquesta relació correspon a frases com «*A* es retira molt a *B*», *A*, *B* i *C* són, si fa no fa, iguals». Aquestes relacions són simètriques, ja que «si *A* és semblant a *B*, *B* ho és a *A*», i reflexives, car «*A* és semblant a ell mateix». Però no són sempre transitives, car les petites diferències augmenten amb la transitivitat. Aviat passarem els límits, venent la diversitat. Si diem, per exemple, que *A* és si fa no fa tan alt com *B*, i *B* com *C*, i *C* com *D*..... si les diferències en plus són petites entre *A*, *B*, *C*, *D* presos de dos en dos, potser no ho seran entre *A*, *C* o entre *A*, *D* si augmenten en el mateix sentit. Apleguem totes les relacions simètriques i reflexives: aleshores definirem el concepte de similitud, i cada grup d'ella un sol concepte, més o menys universal (semblança quant a color, quant a alçària, als trets fisonòmics), la qual cosa ens permet de tractar una munió d'individus o coses amb un mateix predicat. Hem format, hem abstret, un *quasi objecte*, segons la terminologia de Carnap, objecte semblant al concepte de classe, classe de classes.....

Considerem ara relacions simètriques i transitives, que són sempre una mena d'igualtats: si es troben dins la classe de relacions reflexives totals s'anomenen relacions d'igualtat total. Podem, doncs, definir la similitud (*Sim*), com una classe els elements de la qual són relacions *Sym* i *Rf*.

Def. 41.01 $Sim = Sym \cap Rf$.

I la igualtat *Ig* dins un camp determinat es definirà com la classe de totes les relacions simètriques i transitives.

Def. 41.02 $Ig = Tr \cap Sym$.

Si considerem, però, relacions simètriques i transitives tals que es trobin incloses en el tipus de relacions reflexives totals, obtenim la igualtat total, *Igt*, com a classe de totes elles.

Def. 41.03 $Igt = Tr \cap Sym \cap Ref = Ig \cap Ref$.

Veiem que la igualtat posseeix les propietats de la similitud: el que direm, doncs, d'aquestes, val per a aquelles.

Si *R* és una relació de similitud, breument, una similitud,

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

direm que una classe α és un cercle de similitud respecte a R , si qualsevol parell d'elements de α satisfà la relació R , o mena a un parell propi de R ; i, ultra això, no hi ha, fora de α , cap nou element que tingui amb tots els altres de α la mateixa relació R . La relació « x és semblant a y en tant que home» és una similitud; car deixem de banda petites (relativament) diferències individuals. Formarem el cercle de similitud prenent una classe o conjunt d'elements que tinguin entre ells la relació dita i anirem emplenant el cercle amb tots els elements que tinguin, amb qualsevol del ja trobats, la relació indicada. Naturalment que un cercle de similitud separa la classe sencera dels α de la resta dels objectes però només amb una separació parcial, això és, respecte a la relació R ; no pas, però, respecte a d'altres relacions. Si considerem successivament les classes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que anem formant de mica en mica sense exhaurir encara tots els elements estranys, aleshores formem cercles parcials de similitud; el cercle màxim és l'únic que s'anomena cercle de similitud, i és una funció descriptiva per a cada relació R , $Sim' R$. Si considerem un seguici de relacions $R_1, R_2, R_3, \dots$, sota la condició $R_1 \subset R_2, R_2 \subset R_3, \dots$, llurs cercles màxims i propis de similitud són concèntrics: el cercle mínim absolut és l'individu en tant que original. S'escaurà, però, de vegades, que no valgui $R_1 \subset R_2$, sinó que $R_1 \cap R_2$ solament existeix en alguns parells: aleshores els cercles tenen punts comuns, sense arribar a ésser concèntrics. Exemple: si formem una classe de similitud amb la relació « x és, en tant que home, semblant a y » (R_1), i « x, y són, si fa no fa, d'1 metre i mig d'alçària» (R_2), el cercle R_2 enclou molts elements del cercle determinat per R_1 : no són, però, concèntrics.

Els cercles d'igualtat encara són més tancats, v. gr., la igualtat entre les classes-unitat o classes-parell: i, naturalment, menen a una nova classe d'elements a la qual correspon un nou concepte més unit, més distint dels altres.

Notem que el mètode de formar el cercle total de similitud o igualtat, mitjançant una relació donada, mena a una funció descriptiva $Sim' R$, que defineix un sol objecte (element, classe, classe de classes.....), i, per tant, podem formar amb dret un concepte, partint i tot de molts elements. Hem obtingut un mètode d'abs-

LÒGICA RELACIONAL

tracció molt perfecte, que empra objectes determinats, una relació formadora de l'extensió, aplegadora dels elements. Amb això bastim una classe total. Tenim dret, doncs, a formar *un* concepte distint dels altres i dels elements, ordenat però vers ells; això és, un concepte universal: *Regla lògica d'abstracció*.

I aquest mateix mètode ordena amb ordre de perfecció interna els conceptes universals: *a)* Conceptes universals superiors, corresponents a cercles d'igualtat total, bastits amb relacions *Sym*, *Tr*, *Ref*; *b)* Conceptes universals intermedis, corresponents a cercles d'igualtat parcials, formats amb relacions *Sym*, *Tr*, *Rf*; *c)* Conceptes universals inferiors corresponents a cercles de similitud, formats amb relacions *Sym*, *Rf*.

Amb això resta explicat el fonament lògic per a bastir nous conceptes, mitjançant l'abstracció, encara que la propietat o atribut del nou concepte no se'ns ofereixi directament com imposant-se objectivament.

Quant a la representació simbòlica, notem: si la relació basitidora de *la* classe i *del* concepte és de tipus similitud, l'esquema vectorial es compon o bé de parells deslligats d'elements, units, però, els dos elements de cada parell amb doble vector i cada punt amb vector circular, o bé estan units molts d'ells amb vectors dobles, però la unió mai no arriba a tots sortint d'un de determinat, puix que manca la transitivitat total. En canvi, si la relació és d'igualtat, cada punt està unit amb tots amb doble vector, i cada punt posseeix vector circular.

Un teorema molt important és:

$$41.11 \quad \vdash (S^2 \subset S) \ \& \ (S = \check{S}) = (ER) \left\{ [R \varepsilon (Cls \rightarrow 1)] \ \& \ (S = R | \check{R}) \right\}$$

Aquest «principi d'abstracció» diu que si una relació és transitiva i simètrica equival a una relació $R | \check{R}$; això és, si la relació S val entre x , y , existeix un terme α tal que valen $x R \alpha \ \& \ \alpha R y$, segons la definició de $R | \check{R}$, o, en una altra forma, la relació $x S y$ equival, si és *Tr* i *Sym*, a $x R \alpha \ \& \ y R \alpha$. Prenguem ara α com a terme especial: tots els x , y es troben relacionats, mitjançant una *mateixa* relació R , amb *un mateix* terme α . Podem, doncs, prendre α com a *terme representant*, com a *delegat lògic únic* dels x , y ; és el concepte o classe universal pròpia de la relació S .

§ 42

Similaritat entre les classes

Dues classes α , β seran anomenades *similars* si existeix una relació R biunívoca, el predomini de la qual sigui la classe α , i el postdomini la classe β ; la qual cosa expressarem dient que « α és similar a β » o amb notació pròpia: $\alpha sm \beta$. Cal, doncs, distingir entre *Sim* i *sm*. Veurem aviat que quan dues classes són similars posseeixen el mateix nombre cardinal. D'aquí prové la importància del concepte de «similaritat».

Def. 42.01

$$\alpha sm \beta = (E R) [R \varepsilon (1 \rightarrow 1) \ \& \ (\alpha = \mathbf{D}' R) \ \& \ (\beta = \mathbf{Q}' R)]$$

Pot molt bé esdevenir-se que existeixin ensembles moltes relacions biunívokes entre α , β : aleshores podrem definir la classe d'aquestes relacions escrivint $\alpha \overline{sm} \beta$; i definirem:

$$\text{Def. 42.02} \quad \alpha \overline{sm} \beta = (1 \rightarrow 1) \cap \overleftarrow{\mathbf{D}'} \alpha \cap \overleftarrow{\mathbf{Q}'} \beta.$$

La classe de les relacions de similaritat entre les classes α , β són totes les relacions biunívokes en les quals α és la classe dels antecedents, i β la dels consegüents. Encara podem generalitzar, la definició anterior, prescindint de la naturalesa particular de les classes α , β , fixant aleshores el concepte mateix de similaritat, que serà:

$$\text{Def. 42.03} \quad sm = \hat{\alpha} \hat{\beta} (E ! \alpha \overline{sm} \beta).$$

«La similaritat mateixa és la classe de totes les similaritats entre dues classes qualssevol.»

Notem que les classes α , β poden pertànyer a qualsevol ordre, classes individuals, classes de classes.....; consegüentment, el símbol *sm* posseeix ambigüitat sistemàtica. Tampoc no cal que α , β siguin del mateix tipus, o sigui, que la relació R sigui homogènia: no demanem sinó biunivocitat entre els elements de α , β . Anomenem una relació R biunívoca entre α , β , *correlador conjuntual* (a distingir dels correladors relacionals dels quals parlarem més endavant).

LÒGICA RELACIONAL

Teoremes importants:

42.10 $\vdash R \in (1 \rightarrow 1) \rightarrow [(D' R \text{ sm } Q' R) \& (Q' R \text{ sm } D' R)]$. Si una relació és biunívoca, són biunívocament coordinables (o són similars) el pre amb el postdomini, i inversament.

42.11 $\vdash (\alpha \text{ sm } \alpha) \& I \vdash \alpha \in (\alpha \overline{\text{sm}} \alpha)$. Propietat reflexiva de la relació de similaritat. Si α és similar a α , i restringim la relació d'identitat, això és, considerem la relació d'identitat només entre els elements de α , aquesta relació d'identitat es troba dins qualsevol correlador. La identitat conserva la similaritat.

42.12 $\vdash R \in \alpha \overline{\text{sm}} \beta \equiv \check{R} \in \beta \overline{\text{sm}} \alpha$. Propietat commutativa de R amb $\check{R}$, mantenint-se la similaritat. Si R és un correlador entre α , β , ho és també $\check{R}$ entre β , α . La similaritat és una relació simètrica.

42.13 $\vdash [R \in \alpha \overline{\text{sm}} \beta \& S \in \beta \overline{\text{sm}} \gamma] \rightarrow R \mid S \in \alpha \overline{\text{sm}} \gamma$. Propietat transitiva de la similaritat. Si R és un correlador conjuntual entre α , β , i S entre β , γ , el producte relacional de R , S és un correlador entre α , γ .

42.14 $\vdash \text{Inv}' \text{ sm} = \text{sm}$. La inversa de similaritat és similaritat.

42.15 $\vdash \text{sm}^2 = \text{sm}$.

42.16 $\vdash \alpha \text{ sm } \beta \rightarrow (\gamma \text{ sm } \alpha \equiv \gamma \text{ sm } \beta)$.

42.17 $\vdash \alpha \in 1 \rightarrow (\beta \text{ sm } \alpha \equiv \beta \in 1)$.

42.18 $\vdash 1 = \hat{\beta} (\beta \text{ sm } \iota' x)$: «1 és la classe de totes les classes similars (o biunívocament coordinables) amb la classe-unitat.»

42.19 $\vdash \wedge \text{ sm } \wedge$. Zero és solament biunívocament coordinable amb zero.

42.20 $\vdash \beta \text{ sm } \wedge \equiv (\beta = \wedge)$.

42.21 $\vdash 0 = \hat{\beta} (\beta \text{ sm } \wedge)$.

42.22 $\vdash \{ \alpha \text{ sm } \beta \& \gamma \text{ sm } \delta \& (\alpha \cap \gamma = \wedge) \& (\beta \cap \delta = \wedge) \} \rightarrow (\alpha \cup \gamma) \text{ sm } (\beta \cup \delta)$. Aquesta prop. és fonamental per a la teoria de l'addició.

42.23 $\vdash (\alpha \text{ sm } \gamma \& \beta \text{ sm } \delta \& \gamma \subset \beta \& \delta \subset \alpha) \rightarrow (\alpha \text{ sm } \beta)$. És el teorema de Schröder-Bernstein en la teoria dels conjunts. Si la classe α és biunívocament coordinable amb la γ , i la β amb la δ , i, amb tot, γ és una part de β (pròpia o impròpia), i δ ho és de α ,

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

es dedueix que α és biunívocament coordinable amb β . Amb aquests teoremes purament lògics ens atansem contínuament a l'aritmètica. No volem amb tot avançar un sol pas més, per tal que resti ben palès el camí que hi mena.

§ 43

Teoria general de les seleccions

La teoria lògica de les seleccions és necessària per a la definició estricta de la multiplicació entre classes amb elements finits o infinits. Distingirem dues classes de seleccions: 1) Seleccions practicades dins classes. 2) Seleccions fetes dins relacions.

I. SELECCIONS DINS CLASSES.—Sigui x una classe, els elements de la qual siguin també classes; direm que μ és una classe selecta de x , si hem format μ triant un sol terme de cadascuna de les classes, elements de x . Si, per exemple, x es compon de dos membres α , β , i val $x \in \alpha$, $y \in \beta$, $(x \neq y)$, $x' \cup y'$ és una classe selecta de x . Operació lògica semblant a triar de cada societat un sol membre per a representant en un Congrés de totes les societats de la mateixa finalitat: l'aplec d'aquests representants forma una classe selecta dins la classe de totes les societats-elements de x .

En el cas especial que x enclogui com a elements classes sense membres comuns, és a dir, classes exclusives, aleshores una classe selecta es compon amb un terme qualsevol de cadascuna d'elles; tenim, doncs, que μ serà una classe selecta de x si val

$$(\mu \subset s' x) \& (\alpha) \{ (\alpha \in x) \rightarrow (\mu \cap \alpha) \in 1 \}.$$

La darrera condició $(\mu \cap \alpha) \in 1$ (la classe selecta té amb una classe qualsevol de x només un element comú o la classe-unitat) no val si les classes-elements de x tenen elements comuns: aleshores si x és element de α , β , $x \in \alpha$, $x \in \beta$, i l'elegim com a representant

LÒGICA RELACIONAL

de α i triem γ dins β com a representant d'ella, la classe β tindrà aleshores dos representants dins la classe selecta μ .

Si κ és una classe de classes exclusives, entre el terme triat i la nova classe existeix una relació biunívoca, per tal com aquest terme solament es troba en una classe. I existeixen les funcions objectals «el representant de la classe α » i «la classe del representat»; i el mateix diríem de les altres classes. En canvi, si κ no és una classe de classes exclusives, un mateix terme pot ésser triat com a representant de dues o més, i aleshores la relació entre ell i les seves classes representades és del tipus relació uniplurívoca.

Aquesta relació entre el representant i la seva classe s'anomena relació selectiva o selector. Si R és una relació d'aquesta mena, val:

Def. 43.001 $(\alpha) (\alpha \varepsilon \kappa \rightarrow R' \alpha \varepsilon \alpha) \ \& \ (\mathfrak{D}' R = \kappa);$

o bé:

Def. 43.002 $R \varepsilon (1 \rightarrow CIs) \ \& \ (R \mathfrak{C} \varepsilon) \ \& \ (\mathfrak{D}' R = \kappa).$

Si R és una relació selectiva que relaciona un element amb la seva classe, pertany a la classe de les relacions uniplurívokes. Ultra això, R és una relació enclosa en el tipus més general de la relació ε d'un element amb la seva classe i ensems la classe dels seus conseqüents és una classe de classe, això és, la mateixa μ . Notem que hem d'emprar una mateixa relació per a triar els representants i formar la classe μ , de manera que no són selectors les relacions que només permeten de triar representants d'algunes classes, no pas de totes les subclasses de κ . Naturalment que amb una altra relació selectiva podrem formar una altra classe de representants: sempre, però, cal demanar de cada selector que triï una classe de representants de totes les subclasses.

Si R , doncs, és una relació selectiva, $\mathfrak{D}' R$, la classe dels seus antecedents, és una classe selecta; i si μ és una classe selecta, existeix sempre una relació selectiva R , de manera que valgui $\mu = \mathfrak{D}' R$. Segons això, l'estudi de les seleccions fetes en classes de classes equival a l'estudi de les relacions selectives. Generalitzem ara les definicions: la classe formada amb les relacions selectives (que poden ésser nombroses) fetes en una classe de classes κ , s'anomena $\varepsilon'_{\Delta} \kappa$; i obtindrem la definició tècnica d'aquest símbol de la següent manera:

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Def. 43.003 $R \varepsilon \varepsilon'_\Delta x \equiv R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \ \& \ R \mathfrak{C} \varepsilon \ \& \ (\mathfrak{Q}' R = x);$
i per a qualsevol R :

Def. 43.004 $\varepsilon'_\Delta x = (1 \rightarrow Cls) \cap R' \varepsilon \cap \overleftarrow{\mathfrak{Q}'} x.$

«La classe de relacions selectives és la classe formada amb la classe de relacions uniplurívokes ($1 \rightarrow Cls$) que siguin ensembles ($\cap$) relacions parcials de la relació ε , i ensembles classes que facin l'ofici de consegüents respecte a la classe de classes x .» Aleshores podem formar el concepte superior, classe de classes selectes, això és, la classe de les classes de relacions selectives, que és $\mathfrak{D}'' \varepsilon'_\Delta x$.

En general, si val $\alpha \varepsilon x$, $R' \alpha$, el representant de la classe α , pot ésser qualsevol dels seus elements, però en general la relació selectiva serà diferent per a cada element triat. Consegüentment, si deixem com a representant de les altres classes de x els mateixos elements primerament triats, i variem solament el representant de la classe α , el nombre de relacions selectives és igual al nombre dels elements de α , i, per tant, el nombre total de relacions selectives, fent la mateixa operació de canvi de representants en totes les classes de x , és igual al producte del nombre de termes posseïts per les classes-elements de x . Si x és finit, obtenim la definició ordinària de multiplicació; però tant si x és finit com si no ho és, si definim el producte, mitjançant el nombre de relacions selectives, aquesta definició compleix totes les lleis formals de la multiplicació.

Un exemple: Sigui la classe x la suma de les classes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sense elements comuns; $s'x = \alpha \cap \beta \cap \gamma \cap \delta$, i α la classe dels nombres racionals x , que compleixen la condició $\frac{4}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}$.

Semblantment $\beta, \frac{9}{5} \leq x \leq \frac{11}{5}$; $\gamma, \frac{14}{5} \leq x \leq \frac{16}{5}$; $\delta, \frac{19}{5} \leq x \leq \frac{21}{5}$; la relació determinada per la funció $y = [x]$, on $[x]$ és el valor enter major de x , variant en els dominis indicats, és una relació selectiva o selector dins x , car de cadascuna de les seves subclasses $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tria un element (1, 2, 3, 4) formant amb tots ells una nova classe μ de representants. Escrivem la funció $y = [x]$ en forma de relació $y R [x]$, el $R' [\alpha]$ és l'element únic, 1; $R' [\beta]$ és el 2; $R' [\gamma]$ és

LÒGICA RELACIONAL

el 3; $R'[\delta]$ és el 4; $D'[x]$ és la classe selecta $\mu = (1, 2, 3, 4)$ triada dins x per la relació dita. Existeixen altres relacions selectives per a la mateixa classe μ , v. gr., la relació «valor mitjà entre els dos extrems de cada subclasse de x ». Aquest criteri tria dins $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ la mateixa classe (1, 2, 3, 4). Però si posem la relació més general («valor mitjà entre l'extrem inferior i l'enter més pròxim a ell dins cada classe»), obtenim com a classe de representants $(\frac{9}{10}, \frac{19}{10}, \frac{29}{10}, \frac{39}{10})$; relació que correspon a la funció $y = \frac{L + [x]}{2}$, on L és el límit inferior de cada classe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Semblantment definirem moltíssimes altres relacions selectives. Si designem amb R_1, R_2 les dues relacions definides per llurs corresponents funcions, $P'_\Delta x$, o la classe dels selectors dins x comprèn entre d'altres, els selectors R_1, R_2 . $D'' P'_\Delta x$ significarà la classe formada amb totes les classes diferents de representants, formades a llur torn pels diferents selectors.

II. SELECCIONS DINS LES RELACIONS. — La generalització dels resultats anteriors és molt planera. En la selecció d'una classe de representants dins la classe x empràvem la relació característica que lliga un element amb la seva classe, la relació ϵ . Les altres dues condicions no enclouen cap restricció. Ara, doncs, considerarem el cas en què el representant d'una classe-element de x no tingui amb la seva classe precisament la relació ϵ , sinó qualsevol altra P , exigint de P , naturalment, que compleixi les altres dues condicions. Aleshores tenim un selector de tipus nou, P , quan els selectors anteriors eren del tipus ϵ . En lloc de

$$\epsilon'_\Delta x = (1 \rightarrow Cls) \cap Rl' \epsilon \cap \overleftarrow{D'} x,$$

posarem:

$$P'_\Delta x = (1 \rightarrow Cls) \cap Rl' P \cap \overleftarrow{D'} x;$$

definició de la classe dels selectors emprant la relació P . P enclou, entre altres, la relació ϵ . En general, P mateix no és un selector, però potser en trobarem un entre les seves subrelacions: $P'_\Delta x$ no

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

és, doncs, sempre idèntic a P . I si volem estendre del tot aquesta definició posarem:

Def. 43.01 $P_{\Delta} = \hat{\lambda} \hat{x} \{ \lambda = (1 \rightarrow Cls) \ \& \ Rl' P \ \& \ \overleftarrow{Q}' x \}$, que és la definició fonamental en la teoria de les seleccions; P_{Δ} és la classe de les relacions selectives, o sigui la classe de les relacions uniplurívokes contingudes en P , i que tenen k com a postdomini.

Notem ara que no podem demostrar la proposició:

(P) $(x) (x \in Q' P \rightarrow E! P'_{\Delta} x)$: «Per a qualsevol classe de classes x i qualsevol relació P , podem concloure de — x es troba dins el potsdomini de P — que existeixi una relació selectiva dins la classe de les relacions encloses en P ; encara que sembli molt natural que trobant-se x (suposem-ho) amb totes les seves subclasses entre els conseqüents de la relació P , podríem esperar-nos de trobar entre els antecedents de P (relacionats, per tant, amb els conseqüents de P i amb x) una classe dels dits antecedents, i entre les subrelacions de P una relació almenys que permetés de formar la classe selecta μ respecte a x . Aquesta afirmació equival a l'axioma de Zermelo: «Donada una classe de classes sense elements comuns, i cap d'elles buida, existeix sempre una classe formada amb un sol element de cada una d'aquestes classes.»

$$(x) E! \varepsilon'_{\Delta} Cl ex' x.$$

Aquesta afirmació és una prop. determinada; i, com que no sabem si és veritable o falsa, ni tampoc no posseeix l'estructura dels axiomes ordinaris, cap d'ells purament existencial, els logístics no l'enclouen dins la categoria dels axiomes lògics. D'això tractarem més endavant en arribar a la part matemàtica.

Teoremes:

$$43.10 \quad \vdash R \varepsilon P'_{\Delta} x \equiv R \varepsilon (1 \rightarrow Cls) \ \& \ R \in P \ \& \ (Q' R = x).$$

43.11 $\vdash P \in Q \rightarrow P'_{\Delta} x \in Q'_{\Delta} x$. Si una relació P és part de Q , els selectors de P estan enclosos entre els de Q .

43.12 $\vdash (R \varepsilon P'_{\Delta} x \ \& \ R \in Q) \rightarrow R \varepsilon Q'_{\Delta} x$. Si R és un selector de la classe de selectors determinada per la relació P i essent R

part de Q , R serà també un selector dins la classe de selectors determinada per Q .

43.13 $\vdash E! P'_\Delta x \rightarrow x \in Q' P$. Si existeix un selector almenys dels de la classe determinada per P dins la classe de classes x , es dedueix que la classe de classes x és el postdomini de la relació P . La inversa no és demostrable i equival a l'axioma de Zermelo.

43.14 $\vdash P'_\Delta \wedge = ' \dot{\wedge}$. La classe dels selectors segons P dins la classe nulla, és una classe-unitat de tipus relació nulla. Noteu que no diem que és la classe relacional nulla (zero relacional), sinó una classe-unitat l'únic element de la qual és la relació nulla: conté, per tant, un únic element. Aquesta llei correspon a la fórmula $\mu^0 = 1$ (μ un nombre cardinal). En canvi:

43.15 $\vdash E! x \rightarrow (\dot{\wedge}'_x = \wedge)$. Si existeix una classe qualsevol, podem afirmar que la classe dels termes que estan relacionats amb x mitjançant la relació nulla és composta d'un sol element: la classe nulla mateixa, això és, la relació nulla només val per a triar dins cada classe-element de k , l'element zero.

43.16 $\vdash E! x \rightarrow \dot{\wedge}'_x \in P'_\Delta x$. Si existeix la classe x , es dedueix que la relació nulla no és un selector dins la classe dels selectors, formada per la relació P respecte a k .

43.17 $\vdash R \in P'_\Delta x \rightarrow (R = R \upharpoonright x)$. Si R és una relació selectiva, element de la classe de selectors segons P , R és la mateixa relació R limitada en el postdomini a la classe x .

43.18 $\vdash (R \in P'_\Delta x \ \& \ y \in x) \rightarrow E! R' y$.

43.19 $\vdash [E! P'_\Delta \alpha \ \& \ (P'_\Delta \alpha = P'_\Delta \beta)] \rightarrow (\alpha = \beta)$. Si existeix la classe dels selectors segons P respecte a α , i la classe d'aquests selectors és idèntica a la classe dels selectors segons la mateixa relació P , però dins la classe β , es dedueix que α és la mateixa classe β . Identitat de classes deduïda de la identitat entre classes de selectors, suposant que existeix aquesta respecte a la classe α almenys.

43.20 $\vdash \alpha \neq \beta \rightarrow (P'_\Delta \alpha \cap P'_\Delta \beta = \wedge)$. Proposició complementària (gairebé inversa) de l'anterior.

Fins ara hem seleccionat elements representants de les sub-

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

classes de x , mitjançant relacions uniplurívokes ($1 \rightarrow Cls$). Seleccionem ara emprant relacions pluriunívokes.

Segui ara $P \vdash x$ una relació pluriunívoca i formem $P'_\Delta x$, la classe dels selectors segons la relació P i la classe x : aleshores $P'_\Delta x$ és una classe de relacions selectives, totes del tipus relació *biunívoca*, la qual cosa és demostrada deductivament considerant el procés simbòlic. Recordem que si limitem el postdomini de P a la classe de classes x i suposem que P és una relació pluriunívoca (de molts a un element), escollir, mitjançant un selector determinat pres entre les subrelacions de P , un element dins cada una de les subclases de x com *el* representant, equival a determinar per a cada representant un sol element dins la classe sencera, car la relació entre ell i la classe sencera ha d'ésser pluriunívoca (a cada antecedent un sol consegüent): doncs a un sol antecedent per definició (*el* representant), un sol consegüent; i, com que val la inversa, a una sola subclasse un sol element representant (en virtut de la definició de selecció), la subrelació selectiva és biunívoca. Cada subclasse té només un representant per a cada relació selectiva emprada, quan, en el cas de relació ($1 \rightarrow Cls$), un mateix representant podia amb una mateixa relació ordenar-se a moltes subclases de x .

Valen els teoremes:

$$43.21 \quad \vdash P \vdash x \in (Cls \rightarrow 1) \rightarrow [P'_\Delta x \subset (1 \rightarrow 1)].$$

43.22

$$\vdash [P \vdash x \in (Cls \rightarrow 1) \ \& \ R, S \in P'_\Delta x] \rightarrow [(D' R = D' S) \equiv (R = S)]$$

Si $P \vdash x$ és una relació pluriunívoca, sabem que la classe dels selectors segons P en x són relacions biunívokes: ho seran, doncs, R, S si suposem que són elements d'aquesta classe $P'_\Delta x$, i aleshores afirmar la identitat de llur predomini, equival a afirmar la de les relacions mateixes sense demanar res per als postdominis: ho fa sobre la biunivocitat.

43.23

$$\vdash P \vdash x \in (Cls \rightarrow 1) \rightarrow [D \vdash P'_\Delta x \in (1 \rightarrow 1) \ \& \ (D'' P'_\Delta x \text{ sm } P'_\Delta x)]$$

Recordem que D és una relació del tipus ($1 \rightarrow Cls$). Limi-

tant, doncs, el seu postdomini a una classe $P'_\Delta x$, si la relació resultant és del tipus $(1 \rightarrow 1)$, podem concloure, amb 43.22, a la correspondència biunívoca (*sm*) entre $P'_\Delta x$, la classe dels selectors segons P dins x amb la classe dels antecedents, D'' , dels selectors segons P dins x . Notem que *sm* és aquí una relació inhomogènia, que uneix biunívocament una classe d'elements $D'' P'_\Delta x$ amb una classe de relacions $P'_\Delta x$.

III. SELECCIONS EMPRANT LA RELACIÓ ε . — Els teoremes anteriors, formulats per a qualsevol relació R , valen per a la relació ε : amb llur introducció fem seleccions dins classes de classes, en lloc de seleccions dins relacions. Per això només presentarem alguns dels teoremes més notables:

43.24 $\vdash E! \varepsilon'_\Delta x \rightarrow \bigwedge \bar{\varepsilon} x$. Si existeix almenys una classe μ de representants de les subclasses de x , la classe nulla no pertany a x : car aleshores existeix almenys una relació selectiva; i l'existència d'una relació demana que existeixin almenys dos elements, això és, l'exclusió de la classe nulla.

Notem que no podem posar $\vdash E! \varepsilon'_\Delta x$ (que és l'axioma de Zermelo) per tal d'aplicar a 43.24 la regla de deducció i treure com a afirmació sempre veritable, $\vdash \bigwedge \bar{\varepsilon} x$.

43.25 $\vdash \bigwedge \varepsilon x \rightarrow (\varepsilon'_\Delta x = \bigwedge)$. Si la classe nulla és un element de x , es dedueix que no existeixen selectors per a formar una classe μ de x : val la mateixa justificació conceptual d'abans, recordant que qualsevol selector és una relació que demana per a la seva existència la de dos termes almenys. Per tant, encara que dins x hi hagi d'altres classes no nulles, la presència de la classe nulla fa impossible l'existència d'un selector, car en aplicar-lo a ella mancaria a la relació selectiva antecedent i conseqüent. Aquesta prop. mena en aritmètica a l'afirmació que un producte és zero, encara que només ho sigui un dels factors. No podem demostrar-la inversa sense suposar l'axioma de Zermelo.

43.26 $\vdash \varepsilon'_\Delta \bigwedge = \iota' \bigwedge$. La classe dels selectors dins la classe nulla és la classe-unitat, l'únic element de la qual és la relació nulla. El producte dels nombres cardinals es defineix pel nombre

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

de relacions selectives contingudes en κ . Per tant, si $\kappa = \wedge$, el nombre de selectors dins ε'_Δ és un producte de 0 factors, però segons la llei dita $\varepsilon'_\Delta \wedge$ té un sol element $\wedge$: per tant, el producte de 0 factors és 1. Un cas particular d'aquesta prop. és la ja coneguda fórmula $\mu^0 = 1$ (μ un nombre cardinal).

$$43.27 \quad \vdash R \varepsilon (\varepsilon'_\Delta \kappa) \rightarrow \{(\alpha \varepsilon \kappa \equiv (E! R' \alpha) \equiv R' \alpha \varepsilon \alpha)\}.$$

43.28 $\vdash \varepsilon'_\Delta \iota' \alpha \text{ sm } \alpha$. El nombre de selectors per a la classe-unitat, l'únic element de la qual és la classe α , és biunívocament coordinable (similar) amb la mateixa classe α , això és, el nombre de selectors és el mateix que el nombre d'elements de α , ja que cada element de α pot fer l'ofici de representant, i existeixen, doncs, tantes classes de representants com elements en α : doncs tants selectors; la classe d'ells té el mateix nombre d'elements que la classe α .

43.29 $\vdash \varepsilon'_\Delta \iota'' \alpha = \iota' (\alpha \uparrow \imath)$. ι'' és la classe, els membres de la qual són totes les classes-unitat (diferent, doncs, de $\iota' \alpha$, classe-unitat, l'únic element de la qual és la classe especial α); i la fórmula diu que $\varepsilon'_\Delta \iota'' \alpha$ és una classe-unitat, l'únic element de la qual és $\alpha \uparrow \imath$; això és, la classe α . Equival aritmèticament a la prop. que un producte cardinal els factors del qual són tots la unitat dóna com a valor total 1. Aquí els factors són les classes-unitat, elements de la classe de totes elles, $\iota'' \alpha$; i aquestes classes-unitat, subclases de $\iota'' \alpha$, les tractem multiplicativament, car empren l'operació ε'_Δ , la selecció.

43.291 $\vdash \kappa \text{ C } 1 \rightarrow (\varepsilon'_\Delta \kappa \varepsilon 1)$. Aritmèticament, si un nombre és la unitat, el producte de 1.1.1.1..... és la unitat: això val per a un nombre de factors (que siguin nombres cardinals) finit o infinit o zero.

43.30 $\vdash E! \varepsilon'_\Delta \wedge$. Existeix almenys un selector per a la classe nulla: ço és, segons 43.26, la classe-unitat l'únic element de la qual sigui la relació nulla.

IV. CLASSES COMPOSTES AMB CLASSES MÚTUAMENT EXCLUSI-
VES. — Definim per últim una noció que ens servirà freqüentment.

LÒGICA RELACIONAL

Una classe formada amb classes mútuament exclusives com a elements és una classe tal que si α, β són dos elements diferents qualssevol de κ , α, β no tenen cap element comú. Aquestes classes són molt importants en aritmètica, car el nombre cardinal de κ , $s' \kappa$, és la suma dels nombres cardinals de les seves subclasses. Escriurem, amb *Prin. Math.*, en lloc de « κ és una classe de subclasses mutualment exclusives» $\kappa \in Cls^2 \text{ excl}$, car és una classe de segon ordre (millor, d'un ordre immediatament superior a l'ordre dels seus elements). Si entre les subclasses de κ no es troba la classe nul·la, escriurem: $\kappa \in Cls \text{ ex}^2 \text{ excl}$.

Def. 43.02 $Cls^2 \text{ excl} = \hat{\kappa} \{ (\alpha, \beta \in \kappa \ \& \ \alpha \neq \beta) \rightarrow_{\alpha, \beta} (\alpha \cap \beta = \wedge) \}$.

Def. 43.03 $Cls \text{ ex}^2 \text{ excl} = Cls^2 \text{ excl} \text{ --- } \overset{\leftarrow}{\varepsilon'} \wedge$.

Teoremes:

43.31 $\vdash \iota' \alpha \in Cls^2 \text{ excl}$.

43.32 $\vdash \iota'' \alpha \in Cls \text{ ex}^2 \text{ excl}$.

V. CONDICIONS PER A L'EXISTÈNCIA DE SELECCIONS I FORMULACIONS LÒGIQUES DE L'AXIOMA DE ZERMELO. — Per ara no sabem la manera de demostrar l'existència de selectors per a qualsevol classe. Aquesta afirmació admet les següents formulacions:

43.001 $(P, \kappa) \{ \kappa \text{ C } \mathbf{Q}' P \rightarrow E! P'_{\Delta} \kappa \}$.

43.002 $(P, \kappa) \{ P \in (Cls \rightarrow 1) \ \& \ \kappa \text{ C } \mathbf{Q}' P \rightarrow E! P'_{\Delta} \kappa \}$.

43.003 $(P) E! P'_{\Delta} \mathbf{Q}' P$.

43.004 $(\kappa) [\wedge \varepsilon \kappa \rightarrow E! \varepsilon'_{\Delta} \kappa]$.

43.005 $(\kappa) [\kappa \in Cls \text{ ex}^2 \text{ excl} \rightarrow E! \varepsilon'_{\Delta} \kappa]$.

43.006 $(\alpha) E! \varepsilon'_{\Delta} Cl \text{ ex}' \alpha$.

43.007 $(\kappa) \{ \kappa \in Cls \text{ ex}^2 \text{ excl} \rightarrow [(E \mu) \ \& \ (\alpha) (\alpha \varepsilon \kappa \rightarrow \mu \cap \alpha \varepsilon 1)] \}$.

Es pot demostrar que totes aquestes formulacions són lògicament equivalents i menen a la prop. «Qualsevol classe o conjunt pot ésser ben ordenat», fonamental per a la teoria dels conjunts.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

La darrera formulació de l'axioma sembla la més clara: «Si x és una classe amb subclasses mútuament exclusives i cap d'elles no és la classe nul·la, existeix almenys una classe μ que es compon dels elements triats, un solament de cada subclasse de x .» Anomenem-lo axioma multiplicatiu (*Mult ax*). I definim ara dos nous conceptes lògics: P serà una relació multiplicativa (*Rel mult*) si existeix $P'_{\Delta} \mathbf{Q}' P$, o sigui si val $(x) [x \mathbf{C} \mathbf{Q}' P \rightarrow E! P'_{\Delta} x]$.

Def. 43.04 *Rel mult* = $\hat{P} \{E! P'_{\Delta} \mathbf{Q}' P\}$. I direm que x és una classe de classes multiplicativa, *Cls² mult*, si existeix $\varepsilon'_{\Delta} x$.

Def. 43.05 *Cls² mult* = $\hat{x} \{E! \varepsilon'_{\Delta} x\}$. I per últim definirem:

Def. 43.06 *Mult ax* = $(x) \{x \in \text{Cls } ex^2 \text{ excl} \rightarrow (E \mu) \& (\alpha) (\alpha \varepsilon x \rightarrow \mu \cap \alpha = 1)\}$. Amb aquestes definicions podem demostrar que les formulacions primeres són equivalents al *Mult ax*. Només escriurem l'afirmació més usual,

43.33 $\vdash \text{Mult ax} = (x) [\wedge \bar{\varepsilon} x \rightarrow E! \varepsilon'_{\Delta} x]$. Notem, ultra això:

43.34 $\vdash \text{Mult ax} = (x) [\wedge \varepsilon x \equiv (\varepsilon'_{\Delta} x = \wedge)]$. L'axioma multiplicatiu equival a l'afirmació que un producte cardinal solament s'anulla quan un dels factors és zero.

Podem provar que en casos *especials* existeixen selectors i, per tant, classes de representants. Els més senzills són:

43.35 $\vdash E! \alpha \rightarrow \iota' \alpha \varepsilon \{(\hat{x}) E! \varepsilon'_{\Delta} x\}$. Si existeix almenys un element dins la classe α , podem concloure que la classe-unitat l'únic element de la qual sigui la classe α , és una classe que posseeix almenys un selector.

43.36 $\iota'' \alpha \varepsilon \text{Cls}^2 \text{ mult}$. La classe de totes les classes-unitat posseeix almenys un selector per a formar una classe μ de representants.

43.37 $\vdash x \mathbf{C} 1 \rightarrow x \varepsilon \text{Cls}^2 \text{ mult}$.

§ 44

Relacions inductives i hereditàries

I. CADENES RELACIONALS. — Considerem la relació R en un parell de termes x, y , que la satisfan. Si amb un nombre finit d'aplicacions de R a d'altres termes podem arribar a $x R y$, direm que entre x, y , existeix una cadena relacional, segons R . En altres paraules: una cadena relacional entre x, y equival a l'afirmació que la prop. $x R y$ pot ésser obtinguda amb una potència finita de la relació R . Si R és, per exemple, la relació $<$, la prop. $2 < 5$ pot ésser obtinguda amb les prop. intermèdies $2 < 3, 3 < 4$: doncs $2 < 4$; i $2 < 4, 4 < 5$: doncs $2 < 5$. Entre 2, 5 existeix una cadena relacional de potència R^3 . Entre avi i nét la cadena relacional és de segon ordre segons la relació «avantpassat de». Distingirem dues menes de cadenes relacionals. De primera classe, símbol $x R_* y$; de segona, símbol $x R_{po} y$: en $x R_* y$ la relació R^0 o la identitat pertany al camp de la relació R : és, doncs, $R_* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$. En canvi, en $x R_{po} y$ la identitat no pertany al camp de R ; $R_{po} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \dots$. Un exemple de $x R_* y$ és la relació d'igualtat: de $x R_{po} y$ la de $<$. No totes les relacions donen lloc a una cadena relacional. Per exemple, la relació de «doble que», «immediat a»; si són a, b, c, d , quatre punts en una línia recta situats a distància-unitat entre ells, la relació d'immediació no permet de passar de a a c i d : aquesta relació es detura al primer pas: si volem relacionar a, d , cal emprar una altra relació. El mateix s'esdevé amb la de «doble que» o qualsevol altra d'intransitiva. Podem, doncs, afirmar que les relacions transitives són d'alguna manera hereditàries, car passen d'un terme a un altre llurs propietats, a través dels intermediaris, tots participant d'elles. Les intransitives prenen un caire de propietats no hereditàries.

Amb tot, no n'hi ha prou amb aquesta definició general per a caracteritzar una relació com a hereditària (erblich, ancestral en

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Prin. Math.) Cal posseir un criteri segur per a saber si la propietat $x R y$ es conservarà, s'heretarà entre $x R z$, això és, si podrem passar d'un terme a un altre de diferent amb un nombre *finit* de passos, emprant la mateixa relació encara que en potència superior, puix que una herència comprovable amb un nombre infinit d'aplicacions de R esdevé incompressible. Ens manca, doncs, una definició de «finit». Frege en trobà una de molt enginyosa emprant el concepte de «classe o propietat hereditària». Una classe μ (o la seva propietat) s'anomena *hereditària* de la relació R si qualsevol consegüent d'un element de μ pertany encara a la mateixa classe μ , això és, $\check{R}'' \mu \subset \mu$. Si, per exemple, μ és la classe de les persones de nom Ferrer, μ és una classe hereditària respecte a la relació de pare a fill: aquesta relació propaga i conserva el nom Ferrer. Si μ és la classe dels nombres majors que 100, aquesta propietat, ésser major que 100, és conservada i propagada (heretada) emprant la relació ν a $\nu + 1$, car *el següent* d'un nombre major que 100 és major que 100: es troba, doncs, encara en la classe μ dels nombres majors que 100. Direm, per tant, que la relació R és hereditària, si existeix almenys una classe μ tal, que aplicada a un parell d'elements de μ , podem establir una cadena relacional amb els altres elements, de manera que tots els nous consegüents restin en μ . Enclou, doncs, aquesta definició dues condicions: invariància de la relació (l'herència té caràcter de transmissió d'un mateix caire), i invariància respecte a les cadenes relacionals. Si la relació R dóna lloc a una cadena de primera classe, direm que és una relació hereditària, si val:

Def. 44.01

$$R_* = \hat{x} \hat{y} \{ (x \in C' R) \ \& \ (\check{R}'' \mu \subset \mu) \ \& \ (\mu) (x \in \mu \rightarrow y \in \mu) \}.$$

Designarem la inversa de R_* amb $Inv' R_*$:

Def. 44.02 $\check{R}_* = Inv' R_*$.

Els teoremes més importants són:

44.10 $\vdash x R_* y \equiv x \in C' R \ \& \ \check{R}'' \mu \subset \mu \ \& \ (\mu) (x \in \mu \rightarrow y \in \mu)$.
 Condició perquè entre x , y existeixi una relació hereditària.

LÒGICA RELACIONAL

44.11 $\vdash \check{R}'' \mu \text{ C } \mu \equiv R'' - \mu \text{ C } - \mu$. Que la classe dels successors de R dins μ resta en μ , equival a afirmar que la classe dels antecessors de la classe complementària de μ , $- \mu$, resten enclosos en $- \mu$. Si tots els nombres majors que 100 resten dins la classe dels > 100 , emprant la relació de ν vers $\nu + 1$, és a dir, la relació de següent, tots els menors que 100 restaran enclosos en la classe dels menors que 100, complementària de l'anterior, emprant la relació de ν vers $\nu - 1$, vers l'anterior.

44.12

$\vdash \check{R}'' \mu \text{ C } \mu \ \& \ (\mu) (x \varepsilon \mu \rightarrow y \varepsilon \mu) \equiv [R'' \mu \text{ C } \mu] \ \& \ (\mu) (y \varepsilon \mu \rightarrow x \varepsilon \mu)$.
Llei d'herència emprant $\check{R}$ i R .

44.13 $\vdash x R_* y \ \& \ (z) (w) \{ [\varphi(z) \ \& \ z R w] \rightarrow \varphi(w) \ \& \ \varphi(x) \} \rightarrow \varphi(y)$.
«Si entre x , y existeix una relació hereditària R , i φ és una propietat que si convé a un qualsevol z convé a un altre qualsevol w , units amb R , i suposem que convé a x , podrem deduir-ne que convé a un altre qualsevol y .» Propagació hereditària d'una propietat.

44.140 $\vdash (\check{R}'' \mu \text{ C } \mu) \ \& \ (\alpha \text{ C } \mu) \rightarrow (\check{R}''_* \alpha \text{ C } \mu)$. Si μ és una classe hereditària i α està continguda en μ , tots els descendents de α es troben també en μ .

II. POTÈNCIES D'UNA RELACIÓ. — Considerem ara com a classe ξ , les propietats hereditàries de la qual anem a estudiar, la classe formada amb els elements $R, R^2, R^3, R^4, \dots$, això és, amb les potències successives d'una mateixa relació, R . Cada una d'elles té amb la seva precedent la relació $|R$: en efecte, $R^2 = |R' R$; $R^3 = |R' R^2$, etc. $|R' \rho$ és una funció descriptiva, la qual per al valor R de la seva variable ρ mena a l'objecte R^2 : i $|R' R$ el podem llegir, «la relació que surt de R , fent el producte relacional $|R$ ». I semblantment per a $|R' R^2, \dots$, etc. Si considerem, doncs, la sèrie $R, R^2, R^3, R^4, \dots$ veiem que cada terme té amb R la relació $(|R)_*$, que serà, naturalment, emprant 44.01,

Def. 44.011

$$(|R)_* = \hat{\rho} \hat{\sigma} \{ (\rho \varepsilon \mathbf{C}' |R) \ \& \ (| \check{R}'' \zeta \text{ C } \zeta) \ \& \ (\zeta) (\rho \varepsilon \zeta \rightarrow \sigma \varepsilon \zeta) \}.$$

$|R$ és, doncs, una propietat hereditària dins la classe ζ formada amb $R, R^2, R^3, \dots$, car si el resultat d'aplicar $|R$ a R és R^2 (un element

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

de ζ), el resultat d'aplicar $|R$ a R^2 és R^3 (un altre element de ζ), etc.: doncs $|R$ és hereditària dins ζ , i qualsevol membre de ζ s'obté amb $(|R)_*$, ço és, o amb la potència R^0 , o amb la R , o amb la R^2 (recordant $R_* = R^0 \cup R^4 \cup R^2$).

Si considerem ara R_{po} o relacions hereditàries que no enclouen la identitat en llur camp, sabem que amb elles assolirem un terme sortint d'un altre amb la potència R , o bé amb la R^2 , o bé amb la R^3 Si volem estar segurs que amb un nombre finit de potències de R arribarem al terme desitjat, cal saber si existeix una classe hereditària ζ que compleixi les condicions

Def. 44.03 $R_{po} = \hat{x} \hat{y} \{ (\zeta) (\bar{R}'' \zeta \subset \zeta) \ \& \ (\bar{R}' x \subset \zeta) \rightarrow y \in \zeta \}$.

Deixem la condició imposada en 44.01, $x \in C' R$, car x solament pertany aquí al predomini. La classe formada amb totes les potències de R , excloent R^0 (o la identitat), és una funció descriptiva o funció pluriobjectal que es defineix,

Def. 44.04 $Pot' R = (|\bar{R})'_* R$. Però la classe formada amb totes les potències de R , incloent R , té com a definició,

Def. 44.05 $Pot \ id' R = (|\bar{R})'_* R^0$. (L'addició de id al Pot alludeix a la presència de la Identitat, R^0 .)

Teoremes:

Dels conceptes mateixos de R_* , R_{po} es dedueix:

44.14 $\vdash R^0 \subset R_* \ \& \ R \subset R_* \ \& \ R^2 \subset R_* \ \& \text{, etc.}$

44.15 $\vdash R_* | R \subset R_*$.

44.16 $\vdash R \subset R_{po} \ \& \ R^2 \subset R_{po} \ \& \text{.....}$

44.17 $\vdash R^2 \subset R_*$. R_* és una relació transitiva.

44.18 $\vdash R^2 \subset R_{po}$. R_{po} és una relació transitiva.

44.19 $\vdash R_* = s' Pot id' R = R^0 \cup R \cup R^2 \cup R^3$

44.20 $\vdash R_{po} = s' Pot' R = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

§ 45

Anàlisi general d'una relació

Si x és un antecedent, però mai un consegüent de la relació P , x s'anomena «antecedent inicial» de P , símbol $x B P$, i definim:

I. ELEMENTS INICIALS.

Def. 45.01 $B = \hat{x} \hat{P} (x \in D' P - Q' P)$.

L'antecedent inicial definit en ell mateix és la classe de tots els x que respecte a una relació qualsevol P pertanyen al predomini, però mai al postdomini de la relació. La proposició, doncs, $x P y$ és veritable, però mai la $y P x$. És clar que no totes les relacions posseeixen antecedents o elements inicials, v. gr., les de tipus igualtat, en les quals, a causa de la simetria, qualsevol terme pot fer d'antecedent i de consegüent: amb $a = b$ val $b = a$. El mateix direm de qualsevol relació simètrica. Però si prenem totes les relacions per a les quals existeixin x , que només pertanyen al camp dels antecedents i mai al dels consegüents, i amb totes elles formem una classe, aquesta classe és B , l'antecedent absolut antonomàsticament. $\vec{B}' P$ són, doncs, els membres inicials que fan d'antecedents i mai de consegüents: i $\vec{B}' \check{P}'$ és la classe dels que són solament consegüents de P (això és, antecedents de $\check{P}$). En la figura 3, $B' G = a$: $\vec{B}' \check{G} = (f, c, d, h, i, k, l)$. Si P és la relació de «parent a fill», $x B P$ és solament satisfeta per a $x = \text{Adam o Eva}$. Per això, els elements $D' P - Q' P$ s'anomenen membres inicials. $B' P$ és una funció uniobjectal que defineix un sol element, el primer terme, l'antecedent absolut, de P : $B' \check{P}$ serà el terme final, el consegüent final, absolut. No totes les relacions posseeixen un sol antecedent i consegüent absoluts: $\vec{B}' P$ serà moltes vegades veritable, $B' P$ falsa: i el mateix diríem de $\vec{B}' P$ i $B' \check{P}$.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

II. MÍNIMS I MÀXIMS. — Considerem ara una classe α ; direm que un terme d'ella, x , és un mínim dins α respecte a la relació R , si x és element de α i del $C'P$: no pertany mai, però, a la classe dels consegüents de α , això és, a $\check{P}''\alpha$; en altres paraules: no és consegüent de cap altre element de α , o no té cap altre element com a antecedent. Indiquem aquesta relació entre x i α amb « $\min_p$ »

$$x \min_p \alpha \equiv x \in \alpha \cap [C'P - \check{P}''\alpha]$$

I generalitzant per a qualsevol classe α :

$$\text{Def. 45.02 } \min_p = \hat{x} \hat{\alpha} [x \in \alpha \cap (C'P - P''\alpha)].$$

Naturalment que tindrem,

Def. 45.03 $\max(P) = \min(\check{P})$. Essent $\min(P)$ i $\max(P)$ relacions, podem formar funcions objectals. Per a fer-les més clares, escriurem, en lloc de $\max(P)$ i $\min(P)$, $\max'_p$ i $\min'_p$, i tindrem: $\min'_p \alpha$, $\min'_p \alpha$, $\max'_p \alpha$, $\max'_p \alpha$: si α és, v. gr., un conjunt de nombres i P la relació $<$, $\min'_p \alpha$ és el nombre més petit (si hi existeix), i $\max'_p \alpha$ el més gran (si hi existeix).

Prenguem la relació de «parent a fill», P : $\check{B}'P$ és la classe dels parents que no són fills (si la humanitat sencera ha començat amb Adam i Eva, $\check{B}'P$ només són dos individus). Considerem ara la segona generació: aplegarà els fills els pares dels quals no siguin fills, això és,

$$\hat{x} (Q'P - Q'P^2) = \hat{x} (Q'P - P''Q'P) = \min'_p Q'P,$$

que tradueixen la mateixa idea, la classe dels elements que pertanyen al postdomini de P (són fills), però no pas a la segona potència del postdomini de P (no són fills de fills). Els elements d'aquesta classe fan de començament o membres inicials de la relació $Q'P$. Per això escrivim $\min'_p \alpha$: considerem la tercera generació, formada amb homes que siguin néts, però no pas besnéts,

LÒGICA RELACIONAL

això és,

$$\mathbf{Q}' P^2 - \mathbf{Q}' P^3 = \mathbf{Q}' P^2 - P'' \mathbf{Q}' P^2 = \overrightarrow{\min_p} \alpha (\mathbf{Q}' P^2)$$

i així indefinidament.

Notem el teorema:

$$\begin{aligned} \mathbf{45.10} \quad & \vdash (x = B' P) \equiv [x = \iota' (\mathbf{D}' P - \mathbf{Q}' P)] \equiv \\ & [(\mathbf{D}' P - \mathbf{Q}' P) \varepsilon 1 \ \& \ x \varepsilon (\mathbf{D}' P - \mathbf{Q}' P)]. \end{aligned}$$

Condicció d'existència d'un únic antecedent absolut.

III. DESCENDÈNCIA I FAMÍLIA. — Anomenem descendència lògica de x segons la relació R , o més breument R -descendència (Nachkommenschaft, posterity) de x , a $\overleftarrow{R}_* x$, o el conjunt de tots els conseqüents de x , emprant les relacions R^0 , R , R^2 , R^3 ,..... Emprant R^0 , el conseqüent de $R' x$ és el mateix x . Amb x com a antecedent anirem, mitjançant R , R^2 ,....., cercant els conseqüents, i amb tots formarem $\overleftarrow{R}_* x$. $(\overrightarrow{R}_* x) \upharpoonright R$ serà una relació limitada als membres de la posteritat de x . Podrà esdevenir-se que amb una potència superior a la R^0 de R tornem al mateix membre z . Aleshores s'anomena z un element circular, i escriurem $z R_{p_0} z$ (R_{p_0} encloent les potències superiors a R^0). Podem, doncs, descompartir les descendències de x en dues classes: la dels membres circulars $I_p x$ i la dels membres no circulars $J_p x$, i, per tant:

$$\text{Def. 45.04} \quad I_p x = \overleftarrow{P}_* x \cap \hat{z} (z P_{p_0} z).$$

Def. 45.05 $J_p x = \overrightarrow{P}_* x - I_p x$. Segons la naturalesa de les relacions, seran $I_p x$ o $J_p x$ classes buides.

$\overleftrightarrow{R}_* x$ denota la classe dels predecessors i descendents de x , amb x mateix, que compleixin la relació R .

Def. 45.06 $\overleftrightarrow{R}' x = \overleftrightarrow{R}_* x \cup (\iota' x \cap \mathbf{C}' R) \cup \overleftarrow{R}' x$. La classe $(\iota' x \cap \mathbf{C}' R)$ té un element en cas de valer $x \varepsilon \mathbf{C}' R$, si no és buida; i resta $\overleftrightarrow{R}' x = \overrightarrow{R}' x \cup \overleftarrow{R}' x$. La unió per $\cup$ de la descendència i precedència (que és la descendència segons $\breve{P}$, Vorfahrenschaft)

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

de x , s'anomena la família de x segons R ; i es definirà:

Def. 45.07 $\overleftrightarrow{R''} x = \overrightarrow{R'} x \cup \overleftarrow{R'} x$. És a dir, 45.06 emprant R_* (les potències de R amb R^0 mateixa). $\overleftrightarrow{R'}$ són les famílies formades amb R . Si tots els membres d'una família són circulars, la família i la relació s'anomenen circulars; si R no posseeix cap element d'aquesta mena, R s'anomena oberta, la qual cosa equival a

$$R_{p_0} \in J, R_{p_0} \in Irr.$$

La relació d'igualtat és circular; la de $<$, oberta.

§ 46

Transformacions internes d'una relació

Considerem dues relacions Q , S , i formem amb elles el producte relacional $S | Q | \check{S}$, que escriurem $S; Q$. Això és:

Def. 46.01 $S; Q = S | Q | \check{S}$: i s'anomena imatge de la relació Q respecte a la S : o també, «si sobre la relació Q fem l'operació $S |$, $| \check{S}$ obtenim una representació de Q en termes de S »: $S; Q$ és, en general, una nova relació. Considerem, en efecte, dos elements x , y , entre els quals val $x Q y$; i dos altres u , v , de la relació S , units amb x , y , per S ; $u S x$, $v S y$ (o sigui $y \check{S} u$). La relació $S | Q | \check{S}$ ens permet de relacionar u , v , car tenim $u S x$ & $x Q y$ & $y \check{S} v$, això és, $u (S | Q | \check{S}) v$. Podem dir aleshores que x , y , tenen com a imatge els u , v : potser que existeixin molts x , y , relacionats amb Q , que menin als mateixos u , v : és a dir, que molts elements de Q tinguin una mateixa imatge. Colloquem-nos, amb tot, en el cas més interessant: el d'una representació biunívoca de tot el camp de Q en el de S . Demanem, doncs:

$$S \in (1 \rightarrow 1) \text{ \& } (C' Q = \mathfrak{A}' S).$$

LÒGICA RELACIONAL

La figura ajudarà a la comprensió:

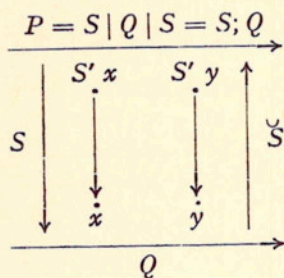


Fig. 10

Si S és biunívoca, existeixen $S' x$ i $S' y$, que són solament u, v . En aquest cas S s'anomena correlador relacional od'isomorfia entre les relacions $P = S | Q | \check{S}$ i Q que cal distingir del correlador entre classes (§ 42). La classe dels correladors entre P, Q és indicada amb $P \overline{\text{smor}} Q$ (P és similis ordine amb Q). Si existeix almenys un correlador entre P, Q , P, Q s'anomenen isomorfs, $P \overline{\text{smor}} Q$; i podem definir, com a 42.02, 03,

Def. 46.02

$$P \overline{\text{smor}} Q = \hat{S} \{ S \in (1 \rightarrow 1) \ \& \ (C' Q = C' S) \ \& \ [P = (S | Q | \check{S})] \}$$

Def. 46.03 $\overline{\text{smor}} = \hat{P} \hat{Q} (E ! P \overline{\text{smor}} Q)$. La raó d'anomenar P, Q , semblants quant a l'ordre, si existeix una S de les condicions dites, és clara; car a cada terme de P en correspon un sol de Q , i inversament; i en el mateix ordre. De manera que si val $u P v$, i mitjançant S , a u correspon x i a v, y , valdrà $x Q y$ i no pas $y Q x$, i inversament. Siguin, per exemple, S la relació «meitat que» ($\check{S}$ serà aleshores, doble que) i Q la relació $<$: tenim, v. gr., per a $x = 2, y = 3$; $1 S 2, 2 Q 3, 3 S 6$:

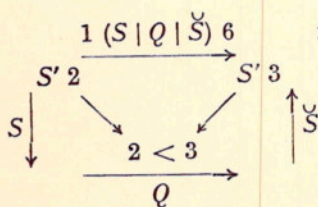


Fig. 10 a

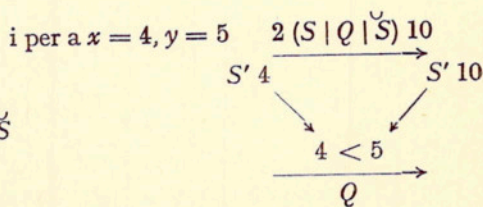


Fig. 10 b

$(S | Q | \check{S})$ té com a parells propis (1, 6) (2, 10), etc., semblants en l'ordre amb els de Q , (2, 3) (4, 5).....

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Teoremes:

46.10 $\vdash I \vdash C' Q \varepsilon (Q \overline{smor} Q)$. La relació d'identitat dins el camp de la relació Q , és un correlador relacional de la mateixa Q .

46.11 $\vdash Q smor Q$. La isomorfia és reflexiva.

46.12 $\vdash S \varepsilon P \overline{smor} Q \equiv \check{S} \varepsilon P \overline{smor} Q$. Si la relació S és un correlador relacional amb P , Q , també ho serà $\check{S}$.

46.13 $\vdash P \overline{smor} Q \equiv Q \overline{smor} P$. Propietat simètrica.

46.14 $\vdash S \varepsilon P \overline{smor} Q \ \& \ T \varepsilon Q \overline{smor} R \rightarrow S | T \varepsilon P \overline{smor} R$. Si dues relacions S , T són correladors dels P , Q i de Q , R el producte relacional $S | T$ és un correlador de P , R .

46.15 $\vdash P smor Q \ \& \ Q smor R \rightarrow P smor R$. Propietat transitiva.

46.16 $\vdash I \in smor$. La identitat és un correlador relacional.

46.17 $\vdash smor = Inv' smor$. La inversa d'isomorfia és isomorfia.

46.18 $\vdash smor^2 = smor$. Tot correlador és una relació transitiva.

46.19 $\vdash P smor Q \rightarrow C' P smor C' Q$. Si P , Q són relacions isomorfes, també ho són llurs camps.

46.20 $\vdash [S \varepsilon P smor Q] \equiv [S \varepsilon (C' P) sm (C' Q) \ \& \ P=S; Q]$. Si la relació S és un correlador relacional entre P , Q , S serà un correlador conjuntual entre els camps de P , Q , i P és la relació $S | Q | \check{S}$. Aquestes dues darreres lleis formulen unions entre correladors relacionals i conjuntuals.

46.21 $\vdash P smor Q \rightarrow (E! P \equiv E! Q)$.

46.22 $\vdash S \varepsilon P \overline{smor} Q \rightarrow [(P | S = S | Q) \ \& \ (\check{S} | P = Q | \check{S})]$.

46.23 $\vdash P smor Q \rightarrow P_{p_0} smor Q_{p_0}$.

46.24 $\vdash (\iota | P | \check{\iota}) smor P$. La relació d'unicitat emprada com a correlador no canvia la similitud ordinal de P amb ella mateixa.

PART QUARTA

CONSTRUCCIÓ LÒGICA
D'ALGUNS CONCEPTES MATEMÀTICS

§ 47

Nombre cardinal

I. DEFINICIÓ GENERAL. — El nombre cardinal d'una classe α serà designat amb $Nc'\alpha$ (és, doncs, una funció objectal) i es defineix com la classe de totes les classes similars amb α , çò és, $\hat{\beta} (\beta \text{ sm } \alpha)$.

Per tal de valorar aquesta definició, traient-li el caire de cercle viciós, notem: sigui x un objecte (Napoleó, Goethe, la ciutat de Barcelona, Espanya...), 1 no és encara el nombre cardinal de x : 1 és un atribut o predicat que correspon a la classe-unitat $t'x$. En nombres superiors és clar que solament els apliquem a classes (les parts de la terra són cinc, els pols de la terra són dos...); semblantment el nombre cardinal 1 no és predicat de x , encara que sigui un sol objecte (amb un sol element constitutiu, com Goethe; o amb molts, com un regiment), sinó que el nombre 1 és predicat de la classe-unitat corresponent $t'x$. Pel que fa a zero és encara més clar que el predicat «nombre cardinal zero» pertany a la classe. L'afirmació *No hi ha rei a França* és equivalent a *La classe dels reis de França és buida*, o bé, amb la terminologia present, *La classe dels reis de França és un element de la classe zero*; i no podem pas dir: «El rei de França és un element de la classe zero», car no existeix el rei de França. Els nombres cardinals 0, 1, 2, 3, 4..... són, doncs, atributs de segon ordre; aplicables a classes, però no a llurs elements.

Def. 47.01 $Nc'\alpha = \hat{\beta} (\beta \text{ sm } \alpha)$.

Podem, doncs, suposar que una classe té un sol element, dos, tres....., i, amb tot, emprant aquesta coneixença, definir el nombre cardinal 1, 2....., sense petició de principi; car, si una classe té

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

un sol element, a aquest element convé un predicat determinat en virtut de la seva pertinença a la seva classe (recordem que $a \in \alpha = F(a)$), però aquest predicat F és de primer ordre, distributiu. En canvi, el predicat «nombre cardinal» és collectiu, de segon ordre, i la definició donada de nombre cardinal es serveix de les classes com a tals i de correladors (relacions) conjuntuals, per tal de bastir amb predicats de primer ordre un de segon. Goethe és home, i a la classe-unitat formada amb ell com a únic element (formada, per exemple, amb la funció prop. « x és l'autor del Faust») correspon el predicat «un»; «el tipus de Goethe és un»; però no pas la *unitat*: aquesta és un predicat propi de les classes, formada amb totes les classes-unitat, és a dir, amb totes les classes biunívocament coordinables amb una classe-unitat qualsevol. El mateix diríem de la distinció entre dos com a predicat d'una classe i *el dos*; entre tres i *el tres*, etc. Generalitzem ara gradualment la definició 47.01.

Entre una classe-unitat i l'u, entre una classe-parell i el dos, etc., hi ha una relació Nc , la relació entre una classe i els seus membres. Així, 1 té amb $t'x$ la relació Nc : Nc és el seu nombre cardinal. Entre 2 i $t'x \cup t'y$ ($x \neq y$) existeix la relació Nc : 2 és el nombre cardinal de la classe $t'x \cup t'y$. La relació Nc és, doncs, de fet la relació sm , car essent sm una relació podem escriure:

Def. 47.011 $Nc'\alpha = \overrightarrow{sm'}\alpha$. De manera que tinguem en ambdues parts una funció descriptiva; i generalitzant per a qualsevol classe, obtindrem la definició mateixa de nombre cardinal:

Def. 47.02 $Nc = \overrightarrow{sm}$. Nombre cardinal és la classe de tots els antecedents de la relació de similaritat.

I per últim, la classe de tots els nombres cardinals NC serà:

Def. 47.03 $NC = \hat{\mu} \{ (E \alpha) \& \mu = Nc'\alpha \}$.

O, més breument:

Def. 47.04 $NC = D'Nc$.

Tenim, doncs, tres definicions, cada una més ampla que l'anterior, $Nc'\alpha$, Nc , NC : Nc' és el nombre cardinal de la classe α , definit com a propietat original de totes les classes biunívocament coordinables amb α . Nc és el nombre cardinal d'una classe qual-

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

sevol; NC la classe de tots els nombres cardinals. De manera que entre $Nc'\alpha$, Nc , NC , hi ha una semblant generalització a $f(a)$, $f(x)$ i $(x)f(x)$. La darrera definició diu que NC és la classe de tots els antecedents de la relació Nc .

Teoremes importants:

47.10 $\vdash Nc'\alpha = \hat{\beta} (\beta \text{ sm } \alpha) = \hat{\beta} (\alpha \text{ sm } \beta)$. El nombre cardinal és independent de la classe triada com a tipus de referència per a la relació de similaritat.

47.11 $\vdash Nc'\alpha = \hat{\beta} \{ (ER) \ \& \ R \in (1 \rightarrow 1) \ \& \ (D'R = \alpha) \ \& \ (C'R = \beta) \}$

47.12 $\vdash Nc \in (1 \rightarrow Cls)$. La relació Nc és uniplurívoca.

47.13 $\vdash \alpha \in Nc' \beta \equiv \beta \in Nc' \alpha \equiv \alpha \text{ sm } \beta$. La relació Nc és simètrica.

47.14 $\vdash \alpha \in Nc' \beta \ \& \ \beta \in Nc' \gamma \rightarrow \alpha \in Nc' \gamma$. La relació Nc és transitiva.

47.15 $\vdash \alpha \text{ sm } \beta \rightarrow (Nc'\alpha = Nc'\beta)$. Dues classes biunívocament coordinables posseeixen el mateix nombre cardinal.

47.111 $\vdash \mu \in NC \equiv [(E \alpha) \ \& \ (\mu = Nc'\alpha)]$.

«El fet d'ésser μ un nombre cardinal, equival a afirmar que existeix almenys una classe α , i que μ és igual al nombre cardinal de α » μ , doncs, no és un nombre cardinal en general, si abans no és nombre cardinal determinat; car, segons les definicions inicials, la classe NC no és una entitat *preliminar* als seus elements, de manera que aquests rebin de NC les propietats llurs, sinó que abans han de posseir propietats que els permetin d'ésser elements de NC .

47.112 $\vdash (\mu, \nu \in NC) \ \& \ E (\mu \cap \nu) \rightarrow (\mu = \nu)$. Recordeu que parlem de nombres cardinals formats amb classe exclusives. Si existeix, doncs, $\mu \cap \nu$, hem de deduir que μ, ν són idèntics.

47.113 $\vdash \mu \in NC \ \& \ \alpha \in \mu \rightarrow (Nc'\alpha = \mu)$. Recordem que el nombre cardinal és una classe de classes biunívocament coordinables. Per a classes qualssevol no valdria el teorema.

47.114 $\vdash NC \in Cls^2 \text{ excl.}$: la qual cosa confirma l'advertència precedent.

47.115 $\vdash (\mu \in NC \ \& \ \alpha, \beta \in \mu) \rightarrow \alpha \text{ sm } \beta$.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

II. DEFINICIONS DE 0, 1, 2. — Ara podem demostrar que les classes 0, 1, 2 són nombres cardinals: la definició de nombre cardinal afegeix a la de classe (o a la de classe de classes, com ho són 0, 1, 2) la relació biunívoca de similitud.

Teoremes:

$$47.16 \quad \vdash 0 = Nc' \wedge.$$

Demostració:

$$1) \quad \vdash Nc' \wedge = \hat{\beta} (\beta \text{ sm } \wedge). \quad (47.01: \frac{\wedge}{\alpha}).$$

$$2) \quad \vdash 0 = \hat{\beta} (\beta \text{ sm } \wedge). \quad (42.21).$$

$$3) \quad \vdash 0 = Nc' \wedge. \quad (\text{R. XIX}).$$

$$47.161 \quad \vdash 0 \varepsilon NC. \quad \text{Zero és un nombre cardinal.}$$

47.17 $\vdash (Nc' \gamma = 0) \equiv (\gamma = \wedge)$. Conclusió del nombre cardinal a la classe.

$$47.18 \quad \vdash \text{sm}'' 0 = 0.$$

$$47.19 \quad \vdash 1 = Nc' \iota' x. \quad (\text{Com } 47.16, \text{ emprant } 42.18.)$$

$$47.191 \quad \vdash 1 \varepsilon NC.$$

$$47.192 \quad \vdash 1 \neq 0.$$

$$47.20 \quad \vdash 1 = \hat{\alpha} \{ (E x) \& x \varepsilon \alpha \& (\alpha - \iota' x) \varepsilon 0 \}.$$

$$47.21 \quad \vdash \text{sm}'' 1 = 1.$$

$$47.22 \quad \vdash (x \neq y) \rightarrow \{ 2 = Nc' (\iota' x \cup \iota' y) \}.$$

$$47.23 \quad \vdash 2 = \hat{\alpha} \{ (E x) \& x \varepsilon \alpha \& (\alpha - \iota' x) \varepsilon 1 \}.$$

$$47.24 \quad \vdash (2 \neq 0) \& (2 \neq 1).$$

$$47.241 \quad \vdash 2 \varepsilon NC.$$

Havent estat definits els nombres cardinals mitjançant la relació *sm*, podem trobar dues classes de nombres cardinals: els homogenis i els ascendents. En efecte: si en la relació *sm* els antecedents són del mateix tipus que els conseqüents, tindrem cardinals homogenis. Si les classes que fan l'ofici de conseqüents són de tipus superior al de les classes-antecedents, obtindrem cardinals ascendents. Un avantatge dels nombres cardinals homogenis és que mai no són zero. Emprarem aquests tipus de cardinals en

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

les definicions lògiques de les operacions matemàtiques, suma..... Els nombres cardinals homogenis s'escriuen $N_0c'\alpha$, $N_0c'\beta$ Els nombres cardinals ascendents s'empren en les definicions de producte i potenciació: signes $N^1c'\alpha$, $N^2c'\beta$ Finalment, s'anomenen cardinals descendents aquells en els quals la relació de similaritat va de classes-antecedents de tipus superior a classes-consegüents de tipus inferior: símbols $N_1c'\alpha$, $N_2c'\beta$ La diferència cabdal entre classes de cardinals ascendents i descendents consisteix en el fet que $\wedge$ pertany als descendents: no pas als ascendents. És clar que valen les afirmacions

$$\alpha \varepsilon N^1c'\beta \equiv \beta \varepsilon N_1c'\alpha$$

i

$$\alpha \varepsilon N^2c'\beta \equiv \beta \varepsilon N_2c'\alpha, \text{ etc.}$$

$N^2c'\alpha$, $N^2c'\beta$ indiquen que existeix diferència de dos tipus..... Prendrem sempre dos nombres cardinals μ , ν , les classes corresponents als quals no tinguin element comú (la qual cosa indiquem amb $\mu \nmid \nu$). Definim aleshores la suma de la següent manera:

$$\text{Def. 47.05 } \mu + \nu = \hat{\xi} \{ (E \alpha, \beta) \ \& \ \alpha \varepsilon \mu \ \& \ \beta \varepsilon \nu \ \& \ [\xi = (\alpha \cup \beta)] \}$$

Notem que hem definit la suma com una nova classe de classes emprant els conceptes lògics E , $\&$, ε , $=$, $\cup$.

Teoremes:

47.25 $\vdash \gamma \text{ sm } \alpha \ \& \ \delta \text{ sm } \beta \rightarrow \{ (\gamma + \delta) \text{ sm } (\alpha + \beta) \}$. Propietat de monotonia, que escriurem amb el simbolisme ordinari en aritmètica:

$$\text{de } a = b \text{ i de } c = d, \text{ deduïm } a + c = b + d.$$

$$\text{47.251 } \vdash \beta + \alpha = \text{Inv}''(\alpha + \beta).$$

$$\text{47.26 } \vdash (\beta + \alpha) \text{ sm } (\alpha + \beta).$$

47.261 $\vdash [(\alpha + \beta) + \gamma] \text{ sm } [\alpha + (\beta + \gamma)]$ i mitjançant 47.15 passàrem a les lleis per a nombres cardinals.

$$\text{47.27 } \vdash Nc'\alpha + 0 = Nc'\alpha.$$

$$\text{47.28 } \vdash (\mu + \nu = 0) \equiv (\mu = 0) \ \& \ (\nu = 0).$$

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

47.29

$$\vdash Nc'\alpha + 1 = \hat{\xi} \{ (E \gamma, y) \ \& \ \gamma \text{ sm } \alpha \ \& \ y \bar{\varepsilon} \gamma \ \& \ [\xi = (\gamma \cup t' y)] \}.$$

47.30 $\vdash 0 + 0 = 0.$

47.31 $\vdash 1 + 0 = 0 + 1 = 1.$

47.32 $\vdash 2 + 0 = 0 + 2 = 2.$

47.33 $\vdash 1 + 1 = 2.$

Totes són proposicions demostrables, encara que llurs proves siguin massa llargues i complicades per a una introducció. Vegeu *Prin. Math.* § 110.

III. LES RELACIONS DE MENOR I MAJOR QUE. — Un nombre cardinal μ s'anomena major que un altre ν , si existeix una classe α que posseeix tants d'elements com unitats té μ , i una subclasse pròpia de α té ν termes; i ensems no existeix una classe β amb ν elements, una subclasse de la qual posseeixi μ elements.

Def. **47.06** $\mu > \nu = (E \alpha, \beta) \ \& \ (\mu = N_0 c' \alpha) \ \& \ (\nu = N_0 c' \beta) \ \& \ E! (Cl' \alpha \cap N_0 c' \beta) \ \& \ \bar{E}! (Cl' \beta \cap N_0 c' \alpha);$ i definim:

Def. **47.07** $\mu < \nu = \nu > \mu$: per tal de poder emprar la definició anterior per al cas $\mu < \nu$. I per definir $\mu \geq \nu$

Def. **47.08** $\mu \geq \nu = (\mu > \nu) \vee \{ (\mu, \nu \varepsilon N_0 C) \ \& \ (\mu = \text{sm}'' \nu) \}$

la qual cosa ens mena a les proposicions següents:

47.34 $\vdash Nc'\alpha > Nc'\beta \equiv E! (Cl' \alpha \cap Nc'\beta) \ \& \ \bar{E}! (Cl' \beta \cap Nc'\alpha).$

47.35 $\vdash Nc'\alpha \geq Nc'\beta \equiv (Nc'\alpha > Nc'\beta) \vee (Nc'\alpha = Nc'\beta).$

47.36 $\vdash \beta \subset \alpha \rightarrow (Nc'\alpha \geq Nc'\beta).$

47.38 $\vdash [\mu \varepsilon N_0 C] \rightarrow (\mu \geq 0).$

47.39 $\vdash [\mu \varepsilon (N_0 C - t' 0)] \rightarrow \mu > 0.$

47.40 $\vdash E! \xi \rightarrow Nc' \xi \geq 1.$

47.41 $\vdash [\mu \varepsilon (N_0 C - t' 0)] \rightarrow \mu \geq 1.$

47.42 $\vdash \mu > 1 \equiv \mu \varepsilon (N_0 C - t' 0 - t' 1).$

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

Substracció:

Si γ , ν són nombres cardinals, tenim:

Def. 47.09 $\gamma - \nu = \hat{\xi} \{ (Nc' \xi + \nu = \gamma) \ \& \ E! (Nc' \xi + \nu) \}$

La condició $E! (Nc' \xi + \nu)$ equival a no emprar encara nombres negatius, i si manquen aquestes condicions solament podrem afirmar $\gamma - \nu = \wedge$.

Ometrem les definicions de producte i potenciació, car llur formulació és massa complicada per a una introducció, i una interpretació simplificada no palesa llurs valors lògics.

IV. NOMBRES CARDINALS INDUCTIUS.—La relació d'un nombre cardinal amb el seu predecessor immediat podem simbolitzar-la amb $+1$, definint $+1$:

$$+1 = \hat{\alpha} \hat{\beta} (\alpha = \beta + 1).$$

(El signe $+$ no significa cap qualitat positiva, que és una relació de la qual encara no hem parlat: $+1$ és un signe de relació, no pas de suma.)

La relació $+1$ resta definida com a funció descriptiva biargumental: $+1$ és el conjunt de tots els parells de classes α , β entre els quals val que α és idèntic a $\beta + 1$: per tant, $+1$ és la relació d'un nombre cardinal amb el seu predecessor immediat. Direm, doncs, que un nombre cardinal qualsevol és inductiu si podem assolir-lo emprant una cadena relacional finita tot sortint de 0.

Def. 47.010 $NC \text{ induct.} = \hat{\alpha} \{ (\alpha (+1)_* 0) \}$. Nombre cardinal inductiu és el conjunt de tots els α , que, sortint de zero, assolim amb la relació $(+1)_*$.

Notem ací que l'asterisc significa, com sempre, que considerem $+1$ com una relació hereditària de la qual emprem totes les potències, R^0 inclusivament, per tal d'assolir des d'un membre qualsevol altre de la classe considerada. Les potències R^0 , R , R^1 , R^2 ,..... són aquí $(+1)^0$, $(+1)$, $(+1)^2$,..... Així, a $(x R^0 x)$ correspon $0 (+1)^0 0$, això és, zero és un nombre cardinal inductiu ($+1$ és un signe de relació: no de suma). A $(x R y)$ correspon

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

aquí la nova relació $1 (+1) 0$, és a dir, la prop. «1 és un nombre cardinal inductiu el predecessor immediat del qual és zero», o bé «1 té amb zero la relació $(+1)$ en primera potència». A $(x R^2 y)$ correspondria amb la relació $(+1)$, la prop. $2 (+1)^2 0$; o bé $2 (+1) 1$: «2 té amb 1 la relació $(+1)$ », «1 és el predecessor immediat de 2». O, si volem, 0 és predecessor immediat de 2, en segona potència de la relació $(+1)$ respecte al 2, etc.

Teoremes:

$$47.43 \quad \vdash \alpha \in NC \text{ induct} \equiv \alpha (+1)_* 0. \quad (47.010).$$

Si emprem ara la definició general de relació hereditària 44.07 i el teorema 44.10, podrem afirmar:

$$47.44 \quad \vdash \alpha \in NC \text{ induct} \equiv (\xi) [(\xi \in \mu \rightarrow \xi + 1 \in \mu)] \ \& \ (\mu) [(0 \in \mu \rightarrow \alpha \in \mu)]$$

La part dreta no és sinó la fórmula de la inducció matemàtica: i la fórmula sencera diu que els nombres cardinals inductius són tots aquells (ξ) que posseeixen totes les propietats hereditàries de μ que convinguin al zero. Recordem que μ significa una classe hereditària qualsevol, i a qualsevol classe correspon una propietat.

$$47.45 \quad \vdash 0 \in NC \text{ induct.}$$

$$47.46 \quad \vdash 1 \in NC \text{ induct.}$$

$$47.47 \quad \vdash 2 \in NC \text{ induct.}$$

$$47.48 \quad \vdash NC \text{ induct} \in NC.$$

47.49 $\vdash [\alpha \in NC \text{ induct} \ \& \ E! \alpha] \rightarrow (\alpha + 1 \in NC \text{ induct})$. Si α és un nombre cardinal inductiu i existeix la classe α , $\alpha + 1$ és també un NC induct.

S'anomenen classes inductives les formades amb elements que siguin NC inductius.

Def. 47.011 $Cls \text{ induct} = s' NC \text{ induct}$.

$$47.50 \quad \vdash \bigwedge \in Cls \text{ induct.}$$

$$47.51 \quad \vdash \iota' x \in Cls \text{ induct.}$$

V. CARDINALS FINITS I INFINITS. CLASSES REFLEXIVES. — La distinció entre cardinals finits i infinits pot ésser establerta per dos camins: pel concepte de nombre cardinal inductiu i pel con-

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

cepte de classes reflexives. *NC* finit equival a nombre cardinal inductiu, car amb el procés de construcció d'un terme, mitjançant les potències successives de la relació $(+ 1)$, assolim solament *NC* finits. Els infinits no poden ésser bastits amb un procés semblant, car hauríem d'emprar potències infinites de la relació $(+ 1)$, i res no sabem encara de la veritable infinitat.

La definició millor d'infinít es basa en el concepte de classe reflexiva, que permet de distingir immediatament els *NC* finits dels infinits.

Una classe s'anomena reflexiva si existeix una relació biunívoca entre la classe sencera i una part pròpia de la mateixa classe. I obtindrem *NC* reflexius com a classes d'aquestes classes reflexives.

Una classe reflexiva serà designada amb *Cls refl.* i un nombre cardinal reflexiu amb *NC refl.*

Def. 47.012 $Cls\ refl. = \hat{\rho} \{ (E R) \ \& \ R \varepsilon (1 \rightarrow 1) \ \& \ (\mathbf{Q}' R \subset \mathbf{D}' R) \ \& \ (E! \overrightarrow{B}' R) \ \& \ (\rho = \mathbf{D}' R) \}$.

Classe reflexiva és la classe de totes les classes ρ dins les quals existeix almenys una relació biunívoca R , la classe dels conseqüents de la qual es troba dins la classe dels antecedents (això és, no té terme final) i ensems posseeix termes inicials, i per últim, la classe ρ és la classe dels antecedents de R . La condició $\mathbf{Q}' R \subset \mathbf{D}' R$ expressa que la relació biunívoca R fa correspondre tots els elements de la classe ρ (que són, segons $\rho = \mathbf{D}' R$, tots els antecedents de R) amb una part pròpia $\mathbf{Q}' R$, $\mathbf{Q}' R \subset \mathbf{D}' R$; i que $\mathbf{Q}' R$ sigui part pròpia, això és, que hi hagi en $\mathbf{Q}' R$ elements que no es trobin dins $\mathbf{Q}' R$, està assegurat amb $E! \overrightarrow{B}' R$, això és, per l'existència de termes inicials que són solament antecedents. La definició dita és, doncs, perfecta.

Teoremes:

47.52 $\vdash NC\ refl. \cap NC\ induct. = \Lambda$. No existeixen nombres cardinals que siguin reflexius i ensems inductius. Hem introduït, doncs, una distinció perfecta entre finit i infinit. Notem,

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

però, que si és veritat que una classe o *NC* infinit no és inductiu, i que totes les classes o *NC* reflexius són infinits, no sabem amb tot demostrar que totes les classes i *NC* infinits siguin necessàriament reflexius.

47.521 $\vdash \text{Cls. refl.} \cap \text{Cls. induct.} = \wedge.$

47.53 $\vdash \mu \in \text{NC refl.} \rightarrow (\mu = \mu + 1).$

47.54 $\vdash \mu \in \text{NC refl.} \ \& \ \nu \in \text{NC induct.} \rightarrow (\mu = \mu + \nu).$

Les dues darreres prop. formulen una distinció clara entre *NC* reflexius i *NC* inductius. La relació $(+ 1)$ mena sempre a nous *NC* inductius; en canvi, no té efecte en *NC* reflexius.

47.55 $\vdash \mu \in \text{NC refl.} \rightarrow (\nu) [\nu \in \text{NC induct.} \rightarrow (\mu > \nu)].$

Qualsevol nombre cardinal reflexiu és sempre major que qualsevol *NC* inductiu. Notem que, en rigor logístic, la inducció completa de les matemàtiques no és un principi o un teorema demostrable, ans solament una definició.

Si emprem l'axioma d'elecció com a vàlid, aleshores es pot demostrar que qualsevol nombre o classe no inductiva és reflexiva, i inversament; i aleshores els conceptes d'infinit i reflexiu i els de finit i inductiu coincideixen tant per a classes com a per a *NC*.

Ultra l'axioma d'elecció cal emprar-ne un altre de nou, l'axioma de la infinitat (Infin. ax.), si volem eliminar algunes dificultats per a l'aplicació matemàtica de la logística. Russell anomena l'axioma d'infinitat, *hipòtesi aritmètica*, que a alguns semblarà molt escaient, fins evident i tot, però que ell prefereix modestament de posar-la com a hipòtesi. Ambdós axiomes extralògics, el de Zermelo o d'elecció i el d'infinitat són de caràcter existencial. Diguem algunes paraules sota el punt de mira logístic de l'Infin. ax.

Hem definit els nombres cardinals inductius com a classe de classes biunívocament coordinables o similars. Per tant, l'existència de classes és un pressupòsit lògic per a l'existència dels *NC* inductius, i ensems l'existència d'una classe depèn en última instància de l'existència dels individus. Consegüentment, l'existència dels *NC* induct., és a dir, el fet que no siguin *conceptes buits*, depèn de l'existència d'individus a l'univers, entenent per univers la col·lecció d'ésser reals o mentals. Ara bé: amb un nombre finit d'individus, n , no pot ésser bastit sinó un nombre finit de classes de primer ordre, $Cl' n$, a saber, 2^n , i el nombre total de

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

classes de classes, emprant com a elements les classes de primer ordre, també és finit, això és, 2^n , etc., etc. Considerant ara les classes biunívocament coordinables, formarem amb elles els nombres cardinals inductius. Aquest procés de bastir per endavant els elements que han de formar una classe superior i, per tant, un NC induct., mai no ens menarà a nombres cardinals infinits, si hem sortit d'un nombre finit d'individus. Ultra això, no podem, encara que ho sembli de bell antuvi, augmentar per mitjans lògics el nombre inicial d'elements. Siguin aquests n (n finit); formem les 2^n , 2^{2^n} , etc., classes de primer, de segon..... ordre. És molt natural de prendre com a elements inicials, primer n , després $n + 2^n$, i amb $n + 2^n$ elements formar classes de segon ordre, molt més nombroses que les d'abans: i amb $2 + 2^n + 2^{2^n}$, com a nous elements, bastir les de tercer ordre..... Amb aquest procés sembla que podem augmentar indefinidament el nombre inicial d'individus i d'elements en les classes superiors, i, consegüentment, els NC induct. Tot amb tot cal dir que hem comès un error molt greu en aquestes formacions, car la classe formada amb $n + 2^n$ elements (individus i classes de primer ordre), la classe bastida amb $2 + 2^n + 2^{2^n}$ elements, n individus, 2^n classes de primer ordre i 2^{2^n} classes de segon ordre, van contra la *teoria primària dels tipus lògics*. Per exemple, la classe formada amb $n + 2^n$ elements, individus i classes de primer ordre, no existeix; car les 2^n subclasses contenen alguns o tots els individus; per tant, hem enclòs com a elements d'una funció una classe amb el mateix rang que els seus elements i hem compost una classe d'ordre superior amb elements de diversos tipus. Suposem, però, que aquest procés ha estat portat al límit; aleshores ensopeguem amb la contradicció següent, que demostra la manca total del valor del procés que hem emprat. En el límit haurem format la classe de totes les classes possibles. Consegüentment, aquesta classe suprema es conté a ella mateixa com a element: en cas contrari podríem bastir una classe superior que contingués com a elements la classe dita suprema i els seus elements, la qual cosa aniria contra la hipòtesi, que és la classe suprema. Aquesta classe suprema conté, entre altres, totes les classes que no són elements d'elles mateixes (v. gr., la classe formada amb els llibres de filosofia d'una biblioteca, que no és pas

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

un llibre de filosofia; en canvi, noteu, com a exemple de classe de caràcter contrari, la classe de tots els conceptes abstractes, la qual és tanmateix un concepte abstracte). Formem amb elles la classe de totes les classes M , que no s'enclouen elles mateixes com a elements. Aquesta classe és contradictòria, car si suposem que M és un element d'ella mateixa, es dedueix que no ho és, car M no conté sinó les classes entre els elements de les quals no figura la mateixa classe. Si suposem, però, que M no és element de M , es dedueix, pel mateix fet, que ho és. Recordem la definició de M , això és, tenim $M \rightarrow \bar{M}$ i $\bar{M} \rightarrow M$; per tant, $\bar{M} \sim M$; i, per tal com aquesta classe contradictòria és element necessari de la classe suprema (element necessari, car la majoria de les classes no s'enclouen elles mateixes com a elements), deduïm que el concepte de classe suprema és contradictori.

Un altre inconvenient del concepte de classe suprema, format pel procés indicat, és que no podem formar la classe de totes les classes contingudes en la classe suprema, car això donaria una classe superior a la mateixa classe suprema.

No podem, doncs, tractar la infinitat d'aquesta manera, partint d'un nombre finit d'individus i bastint classes d'ordres superiors. Tampoc no podem suposar de bon principi infinit el nombre dels individus, car dins l'infinit es troben la classe suprema i la classe de totes les classes que no s'inclouen elles mateixes com a elements; conceptes, ambdós, contradictoris. Cal sotmetre's a la teoria primària dels tipus, i aleshores ens trobem davant una qüestió semblant dins cada tipus. Si suposem els elements finits en nombre, podem construir només un nombre finit de NC induct. amb els elements de cada tipus. Si el nombre total d'elements és n (n finit), els nombres cardinals inductius, que suposin classes de classes amb més de n elements, són tots *buits*, són la classe nulla o zero.

Si el NC induct. corresponent a un univers amb n individus és μ , els NC induct., teòricament definibles, superiors a μ , $\mu + 1$, $\mu + 2$, són tots zero; i, per tant, segons 42.21, tots seran iguals entre ells. Aquesta possibilitat entrebancadora és eliminada amb l'axioma d'infinitat; de manera, però, que evitem les antinòmies.

L'axioma d'infinitat, formulat amb aquests primfilaments, és:

Def. 47.013 Infin. ax. = $(\alpha) (\alpha \in NC \text{ induct.} \rightarrow E! \alpha)$.

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

Si α és un *NC* induct. qualsevol, podem concloure que existeix almenys una classe corresponent a α . O, amb altres paraules, que el *NC* induct. no és buit. Si, v. gr., α és el nombre cardinal inductiu 1, existeix almenys una classe-unitat (l'únic element de la qual pot ésser un individu o una classe). Si α és el *NC* induct. 10^{10} , existeix almenys una classe amb 10^{10} elements, etc. No cal demanar l'existència de moltes classes similars per tal de garantir l'existència lògica d'un *NC* induct., car la relació biunívoca (correlador) exigida per la definició de *NC* induct. «classes de totes les classes biunívocament coordinables», pot ésser establerta entre una sola classe i ella mateixa.

En *Prin. Math.* es prova que l'Infin. ax. admet les següents formulacions, totes lògicament equivalents:

47.56 $\vdash$ Infin. ax. $\equiv (\alpha) (\alpha \in \text{NC induct.} \rightarrow E! \alpha)$.

47.57 $\vdash$ Infin. ax. $\equiv (\alpha) [\alpha \in \text{NC induct.} \rightarrow (\alpha \neq \alpha + 1)]$.

47.58 $\vdash$ Infin. ax. $\equiv (\alpha) (\alpha \in \text{NC induct.} \rightarrow E! \alpha + 1)$.

Les dues darreres formulacions ens indiquen que amb l'Infin. ax. per a cada *NC* induct. trobarem un nou següent, sense ensopegar mai amb zero.

47.59 $\vdash$ Infin. ax. $\equiv \nexists \bar{\epsilon} \text{NC induct.}$ Admetre l'Infin. ax. equival a afirmar que la classe nulla no és un *NC* induct. (cal distingir entre $\wedge$ i 0).

47.60 $\vdash$ Infin. ax. $\equiv [(+1) \uparrow \text{NC induct.}] \epsilon (1 \rightarrow 1)$. L'axioma d'infinatat equival a l'afirmació que, si limitem la relació $(+1)$ al camp dels *NC* induct., la relació $(+1)$ esdevé aleshores biunívoca, és a dir, per a cada *NC* induct. existeix només un sol immediat predecessor, i per a cada un d'aquests, un sol immediat successor; car recordem que, si no val l'infin. ax., existeix un *NC* induct. màxim per a cada tipus, i tots els *NC* induct. superiors són estructures buides, puix que corresponen a classes nulles. A molts conseqüents correspon, doncs, en aquest cas, un sol predecessor immediat: la relació $(+1)$ no és aleshores biunívoca. En canvi, com es veu immediatament, admetent l'axioma d'infinatat, aquest cas no existeix (47.57, 58).

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

§ 48

Progressions i axièmàtica de Peano. Transfinitis de Càntor.

I. PROGRESSIONS. DEFINICIÓ. — La relació $(+ 1)$ posseeix les següents propietats: 1) és biunívoca si la limitem al camp dels NC induct., com hem dit suara; 2) posseeix un sol element inicial; 3) qualsevol altre element pertany a la posteritat, al camp dels conseqüents del terme inicial; 4) cada un dels elements té un successor, o sigui, no existeix un terme final.

Aquesta relació $(+ 1)$ mena a la successió

$$0, 1, 2, 3, 4, 5....., n, n + 1.....$$

Existeixen moltes d'altres successions que compleixen les mateixes condicions de $(+ 1)$. V. gr.: la relació «meitat que», amb la corresponent successió 1, 2, 4, 8, 16..... O bé la relació definida per $y = \frac{1}{x^2}$,

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}.....$$

O la relació més complicada que defineix la successió que encabeix tots els nombres racionals positius:

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{5}....., \text{etc.}$$

Considerant, doncs, com ho hem fet sempre, la classe formada amb totes les relacions d'aquesta mena, anomenades progressions (Prog.) com a elements, definirem:

Def. 48.01 Prog. = $(1 \rightarrow 1) \cap \hat{R} (D' R = \overleftarrow{R'} B' R)$.

Notem tots els matisos de la definició: 1) demanem d'una relació de tipus progressió que sigui biunívoca $(1 \rightarrow 1)$; 2) que

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

posseeixi primer terme, $E! B' R$; 3) que el camp sencer es trobi dins la posteritat d'aquest terme, això és, $C' R = \overleftarrow{R}_* B' R$; car, si mancava aquesta condició, el camp total es compondria de famílies distintes, totes les quals, menys una, no tindrien terme inicial; 4) demanem, finalment, per a una progressió, que cada terme tingui un successor, això és, que la successió sigui indefinida, la qual cosa resta assegurada amb $Q' R \subset D' R$, o bé amb $C' R = D' R$. I per tant, segons la condició tercera podem escriure en una les condicions 3, 4, posant $D' R = R_* B' \overleftarrow{R}$. I aquesta mateixa condició enclou la segona, car, segons 27.12, val $\psi (\iota x) (\varphi x) \rightarrow E! (\iota x) (\varphi x)$. Prenent, doncs, R com a propietat i recordant que $B' R$ aplega els membres inicials de R i que ací R és ensem biunívoca, tenim l'equivalent relacional de $(\iota x) (\varphi x)$ en $B' R$ i podem afirmar: $\overleftarrow{R}_* B' R \rightarrow E! B' R$. És per això que hem donat una definició condensada de Progressió. R_* és, com sempre, el conjunt de les potències $R^0, R, R^2, \dots$: $\overleftarrow{R}_* B' R$, la classe de tots els consegüents de $R^0, R, R^2, \dots$ respecte al membre inicial únic de la relació biunívoca R ; aleshores la funció objectal $\overleftarrow{R}_0 B' R$ mena al mateix membre inicial. Aquestes quatre condicions permeten de demostrar els cinc axiomes de Peano sobre els nombres naturals.

Els teoremes més importants són:

48.10 $\vdash R \in \text{Prog.} = R \in (1 \rightarrow 1) \ \& \ (D' R = \overleftarrow{R}_* B' R)$.

48.11 $\vdash R \in \text{Prog.} \rightarrow (Q' R \subset D' R) \ \& \ (C' R = D' R)$. Les progressions són obertes.

48.12 $\vdash R \in \text{Prog.} \rightarrow (R_{p0} \subset J)$. Si d'una progressió traiem la primera potència de la relació formadora, les potències següents són irreflexives: o menen a nombres diferents.

48.13

$\vdash R \in \text{Prog.} \rightarrow [D' R \bar{\in} \text{Cls. induct.}] \ \& \ [(N_0 c' D' R) \bar{\in} NC \text{ induct.}]$.

Aquest teorema important afirma que la classe dels antecedents d'una relació, tipus progressió, no és una classe inductiva i que el nombre cardinal corresponent a aquesta classe no és tampoc un NC induct.; la qual cosa ens permetrà de deduir que les classes-

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

elements del primer transfinit de Càntor no són inductives. Poden doncs, menar a una nova classe de nombres. En canvi, val:

48.14 $\vdash R \in \text{Prog.} \rightarrow \vec{R}' x \in \text{Cls. induct.}$ Tots els antecedents d'un terme x , segons la relació R , formen una Cls. induct.

II. EL PRIMER TRANSFINIT CARDINAL DE CÀNTOR. — Càntor defineix $\aleph$ com el nombre cardinal propi d'aquelles classes els elements de les quals poden ésser relacionats biunívocament amb els NC inductius, això és, amb la progressió típica 0, 1, 2, 3, 4..... Aquesta definició suposa que $\nu \neq \nu + 1$, és a dir, l'axioma d'infinitat: en cas contrari, els NC induct. formarien una sèrie finita amb la classe $\wedge$ com a terme final. Dues menes de definicions de $\aleph_0$ serien, doncs, possibles teòricament: 1) emprant la relació de similaritat o correspondència biunívoca entre $\aleph_0$ i la sèrie dels NC induct. completada amb l'infinitat; 2) incloent la sèrie dels NC induct. en el tipus més general de Prog. podem definir $\aleph_0$ com la classe de totes aquestes classes els elements de les quals poden ésser ordenats en forma de progressions. Aleshores cal provar que $\aleph_0$ és un nombre cardinal, que és diferent de zero, i que és el nombre cardinal propi dels NC induct., la qual cosa no calia provar en la definició per la relació de similaritat. Amb tot, és preferible aquest adarrera definició que no suposa l'axioma d'infinitat.

Def. 48.02 $\aleph_0 = D'' \text{ Prog.}$

Teoremes:

48.15 $\vdash \alpha \in \aleph_0 \equiv (E R) \ \& \ R \in \text{Prog.} \ \& \ (\alpha = D' R).$ Condició perquè una classe α sigui element de $\aleph_0$.

48.16 $\vdash R \in \text{Prog.} \rightarrow D' R \in \aleph_0.$

48.17 $\vdash \alpha \in \aleph_0 \rightarrow [(E R) \ \& \ (D' R = \alpha) \ \& \ R \in (1 \rightarrow 1) \ \& \ D' R \subset D' R \ \& \ \vec{B}' R \in 1].$

48.18 $\vdash \alpha \in \aleph_0 \rightarrow (Nc' \alpha = Nc' \alpha + 1).$ Propietat reflexiva d'una classe que sigui element de $\aleph_0$.

48.19 $\vdash \alpha \in \aleph_0 \rightarrow \alpha \bar{\in} \text{Cls. induct.}$ (48.13).

48.20 $\vdash \alpha \in \aleph_0 \ \& \ \beta \in \text{Cls. induct.} \rightarrow (\alpha - \beta) \in \aleph_0.$ Una classe de $\aleph_0$ no s'altera si li traiem una classe inductiva.

48.21 $\vdash \alpha \in \aleph_0 \rightarrow [\alpha \text{ sm NC induct.}].$ Les classes transfinites

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

són biunívocament coordinables amb la successió formada amb els nombres cardinals inductius.

48.22 $\vdash \alpha, \beta \in \aleph_0 \rightarrow \alpha \text{ sm. } \beta$. No cal pas suposar que α, β siguin del mateix tipus.

48.23 $\vdash \alpha \in \aleph_0 \rightarrow (\aleph_0 = Nc' \alpha)$. Pas de classe a Nc .

48.24 $\vdash R \in \text{Prog.} \rightarrow (\aleph_0 = Nc' D' R)$.

48.25 $\vdash \aleph_0 \in NC$.

48.26 $\vdash E! \aleph_0 \rightarrow \aleph_0 \in NC \text{ induct.}$

48.27 $\vdash E! \aleph_0 \rightarrow (\aleph_0 = \aleph - 1)$.

48.28 $\vdash \nu \in NC \text{ induct.} \rightarrow (\aleph_0 = \aleph \pm \nu)$.

48.29 $\vdash \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$.

48.30 $\vdash E! \aleph_0 \rightarrow (\nu) (\nu \in NC \text{ induct.} \rightarrow \aleph_0 > \nu)$.

I lleis semblants per a la potenciació, multiplicació i subtracció efectuades sobre $\aleph_0$ amb NC induct.

§ 49

Nombres relacionals

Hem definit els nombres cardinals mitjançant la relació de similaritat (*sm.*). Ara hem de tractar els nombres relacionals corresponents a la relació de similaritat ordinal (*smor.*) estudiada en el § 46. Els nombres relacionals seran designats amb Nr . Fem gradualment la generalització dels conceptes nous. Sigui una relació P qualsevol, el nombre relacional $Nr' P$ (emprem una funció descriptiva) es defineix com la classe de totes les relacions que siguin similars ordinalment amb P , definint la similaritat ordinal segons el § 46.

Def. 49.01 $Nr' P = \overline{\text{smor}' P}$. Per tant, si prescindim de l'ús d'una relació especial (millor, de la classe especial de les relacions similars ordinalment amb P), tindrem:

Def. 49.02 $Nr = \overrightarrow{\text{smor}}$. I, finalment, la classe total formada amb totes les classes de tipus $Nr' P$, $Nr' Q$, etc., serà:

Def. 49.03 $NR = D' Nr$. Els teoremes per als NR són semblants als dels NC .

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Teoremes:

- 49.10 $\vdash N r' P = \hat{Q} (Q \text{ smor. } P) = \hat{Q} (P \text{ smor. } Q).$
- 49.11 $\vdash Q \in N r' P \equiv Q \text{ smor. } P \equiv P \text{ smor. } Q.$
- 49.12 $\vdash E! N r' P.$
- 49.13 $\vdash P \in N r' P.$
- 49.14 $\vdash P \in N r' Q \equiv Q \in N r' P.$
- 49.15 $\vdash P \in N r' Q \ \& \ Q \in N r' R \rightarrow P \in N r' R.$
- 49.16 $\vdash P \text{ smor. } Q \rightarrow (N r' P = N r' Q).$
- 49.17 $\vdash E! (N r' P \cap N r' Q) \rightarrow [P \text{ smor. } Q \ \& \ (N r' P = N r' Q)].$
- 49.18 $\vdash N r' P \in N R.$
- 49.19 $\vdash N R \in \text{Cls.}^2 \text{ induct.}$
- 49.20 $\vdash \mu \in N R \ \& \ P \in \mu \rightarrow (N r' P = \mu).$
- 49.21 $\vdash \mu \in N R \ \& \ P, Q \in \mu \rightarrow P \text{ smor. } Q.$
- 49.22 $\vdash Nc' C' Q = C'' N r' Q.$
- 49.23 $\vdash \mu \in N R \rightarrow C'' \mu \in NC.$ Aquestes dues darreres lleis

uneixen els NR amb els NC . És molt senzill de demostrar que 0_r , 2_r definits en el § 38 són ensems NR . Només ens manca la definició de 1, pres relacionalment.

Def. 49.04 $1_s = \hat{R} \{ (E x) \ \& \ (R = x \downarrow x) \}$. I valen els teoremes:

- 49.24 $\vdash P \text{ smor. } \dot{\wedge} \equiv (P = \dot{\wedge}).$
- 49.25 $\vdash 0_r = N r' \dot{\wedge}.$
- 49.26 $\vdash 0_r \in N R.$
- 49.27 $\vdash P \in 2_r \equiv [(E x, y) \ \& \ x \neq y \ \& \ (P = x \downarrow y)].$
- 49.28 $\vdash P, Q \in 2_r \rightarrow P \text{ smor. } Q.$
- 49.29 $\vdash Q \in 2_r \ \& \ P \text{ smor. } Q \rightarrow P \in 2_r.$
- 49.30 $\vdash 2 \in N R.$
- 49.31 $\vdash 1_s = N r' (y \downarrow y).$
- 49.32 $\vdash C'' 0_r = 0.$
- 49.33 $\vdash C'' 1_s = 1.$
- 49.34 $\vdash C'' 2_r = 2.$

Les operacions de suma, producte, potenciació de relacions i nombres relacionals són massa complicades per a una senzilla introducció. En *Prin. Math.* es trobaran mestrirolament explicades.

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

§ 50

Relacions connexes i sèries

I. RELACIÓ CONNEXA. — Diem que una relació R és connexa (zusammenhängend, connected) si P o bé $\check{P}$ val entre dos elements diferents qualsevol del seu camp, això és, si $x, y \in \mathbf{C}'P$ i tenim $x \neq y$, val $(xPy) \vee (yPx)$. El camp d'una relació connexa es compon d'una sola família, i inversament. Si el camp d'una relació enclou només una família, aquesta relació és connexa.

Def. 50.01 Connex. = $\hat{P}(x) \{x \in \mathbf{C}'P \rightarrow (\overleftrightarrow{P'}x = \mathbf{C}'P)\}$.

Aquesta definició s'aclarirà amb els teoremes que defineixen les condicions perquè P sigui connexa.

Teoremes:

50.10 $\vdash P \in \text{connex.} \rightarrow (x)(y) \{(x, y \in \mathbf{C}'P) \ \& \ (x \neq y) \rightarrow [(xPy) \vee (yPx)]\}$.

50.11 $\vdash P \in \text{connex.} \equiv \check{P} \in \text{connex.}$

50.12 $\vdash R_* \in \text{connex.} \equiv R_{p_0} \in \text{connex.}$

50.13 $\vdash [P \in \text{connex.} \ \& \ (\mathbf{C}'P = \mathbf{C}'Q) \ \& \ P \subset Q] \rightarrow (Q \in \text{connex.})$.

50.14 $\vdash P \in \text{connex.} \rightarrow P_*, P_{p_0} \in \text{connex.}$

50.15 $\vdash P \in Tr \rightarrow (P \in \text{connex.} \equiv P_* \in \text{connex.})$.

50.16 $\vdash R \in (\text{Cls.} \rightarrow 1) \rightarrow R_{p_0} \downarrow \overleftarrow{R'_*} x \in \text{connex.}$

50.17 $\vdash R \in (1 \rightarrow \text{Cls.}) \rightarrow R_{p_0} \downarrow \overrightarrow{R'_*} x \in \text{connex.}$

50.18 $\vdash R \in (1 \rightarrow 1) \rightarrow R_{p_0} \downarrow \overleftrightarrow{R'_*} x \in \text{connex.}$

50.19 $\vdash P \in \text{connex.} \ \& \ Q \text{ smor } P \rightarrow Q \in \text{connex.}$

50.20 $\vdash P \in \text{connex.} \rightarrow N r' P \subset \text{connex.}$

50.21 $\vdash \dot{\wedge} \in \text{connex.}$

50.22 $\vdash x \downarrow y \in \text{connex.}$

50.23 $\vdash P \in \text{connex.} \rightarrow P \upharpoonright \alpha \in \text{connex.}$

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

50.24 $\vdash R \in \text{connex.} \rightarrow [\overrightarrow{B'} R, \overleftarrow{B'} R, \min'_R \alpha, \max'_R \alpha \in (0 \vee 1)]$.

Una relació connexa R té com a màxim un membre inicial, un de final, i cada una de les classes formades amb elements d'ella relacionats amb R posseeix a tot estirar un màxim i un mínim. Les primeres afirmacions es dedueixen de la definició i teorema 50.10; les altres, sobretot del teorema 50.22. I amb una mica de discurriment és possible de donar de totes una prova conceptual.

Si representem amb un esquema vectorial una relació connexa, existeix sempre entre dos punts qualssevol un vector.

II. SÈRIES. — S'anomena sèrie una relació irreflexiva, transitiva i connexa. Definim les sèries mitjançant les relacions i no pas amb el concepte de classe, car una classe pot ésser ordenada de diverses maneres, amb relacions diferents; en canvi, en una sèrie l'ordre és essencial. Una relació amb les tres condicions dites serà anomenada relació serial, o bé, més breument, sèrie. Si R és una relació d'aquesta mena, amb la classe de les seves potències $R, R^2, R_3, \dots$ (això és, amb R_{p_0}), podrem disposar tots els elements d'una sèrie amb llur ordre propi, la qual cosa serà molt avantatjós per a l'estudi lògic de la convergència: la relació R produeix la sèrie (ser.). Considerant, doncs, la classe de totes les relacions amb les propietats indicades, tindrem com a definició general:

Def. 50.02 Ser. = $R' J \cap T r \cap \text{connex.}$

Els teoremes següents aclariran més aquesta definició:

50.251 $\vdash P \in \text{ser.} \equiv P \subset J \ \& \ P^2 \subset P \ \& \ P \in \text{connex.}$

50.252 $\vdash P \in \text{ser.} \equiv P \subset J \ \& \ P^2 \subset P \ \& \ (x) (y) \{ (x, y \in C' P) \ \& \ (x \neq y) \rightarrow (x P y \vee y P x) \}$.

50.253 $\vdash P \in \text{ser.} \rightarrow P^2 \subset J \ \& \ (P \cap \check{P} = \dot{\wedge})$.

50.26 $\vdash P \in \text{connex.} \ \& \ P^2 \subset P \ \& \ P^3 \subset J \rightarrow P \in T r$.

50.27 $\vdash P \in \text{connex.} \ \& \ P_{p_0} \subset J \rightarrow P \in T r$.

50.28 $\vdash P \in \text{ser.} \equiv \check{P} \in \text{ser.}$

50.29 $\vdash P \in \text{ser.} \ \& \ P \text{ smor.} \ Q \rightarrow Q \in \text{ser.}$

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

50.30 $\vdash \dot{\wedge} \varepsilon \text{ ser.}$

50.31 $\vdash (x \neq y) \equiv (x \downarrow y) \varepsilon \text{ ser.}$

50.32 $\vdash P \varepsilon \text{ ser.} \ \& \ x P y \ \& \ (D' P = \iota' x) \rightarrow (P = x \downarrow y).$

50.33 $\vdash P \varepsilon \text{ ser.} \rightarrow P \upharpoonright \alpha \text{ ser.}$

50.34 $\vdash P, Q \varepsilon \text{ ser.} \ \& \ Q \subset P \rightarrow (Q = P \upharpoonright C' P).$

En virtut d'aquestes darreres lleis, les sèries contingudes en una sèrie donada són relacions resultants de limitacions del camp primitiu, i, per tant, el procés de limitar el camp és solament un procediment de triar una part de la sèrie original, sense canviar l'ordre.

III. PUNTS MÀXIMS I MÍNIMS DINS UNA CLASSE. — En el § 45 varem definir els conceptes de $\text{mín}'_p \alpha$ i $\text{màx}'_p \alpha$. Entenem per $x \text{ mínim}_p \alpha$ un element de la classe α , el qual pertany ensems al $C' P$, és a dir, es troba afectat per R , i no pertany a la classe dels consegüents de α , això és, no fa de consegüent respecte a cap dels altres elements continguts α .

$x \text{ mín.}_p \alpha \equiv x \varepsilon (\alpha \cap C' P) - \check{P}'' \alpha$. Pot esdevenir-se que existeixin dins α , segons les relacions que emprem, molts x que compleixin les condicions dites; aleshores definim una funció objectal, la classe d'aquests elements mínims de α respecte a la relació considerada.

Def. 50.03 $\text{mín.}'_p \alpha = (\alpha \cap C' P) - \check{P}'' \alpha$.

La relació mín._p és, doncs, una relació inclosa en ε : i si P és una relació connexa, sabem per 50.23 que la classe definida per $\text{mín.}_p \alpha$ conté un element (classe) o cap, i, per tant, la relació $\text{mín.}'_p$ és del tipus $(1 \rightarrow \text{Cls.})$. Si κ és, doncs, una classe de classes, totes les quals posseeixen mínima, la relació $\text{mín.}_p \upharpoonright \kappa$ serà una relació selectora, això és, podrem afirmar:

$\text{mín.}_p \upharpoonright \kappa \varepsilon \varepsilon'_\Delta \kappa$. En efecte: si κ comprèn, per exemple, les classes $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (4, 5, 6)$ i $\gamma = (6, 7, 8)$ la relació «nombre mínim dins la classe κ » ($\kappa = \alpha \cap \beta \cap \gamma$) mena a classe de representants $(1, 4, 6)$.

Amb aquesta definició lògica de mín._p excloem de $\text{mín.}'_p \alpha$ qualsevol part de α que no estigui continguda en $C' P$, i assolim

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

que $\overrightarrow{\text{mín.}}_p \iota' x$ sigui igual a $\iota' x$, o sigui, que $\text{mín.}_p \iota' x = x$: sota les condicions $x \in \mathbf{C}' P \ \& \ (\overline{x P x})$.

Teoremes:

$$50.35 \quad \vdash x \text{màx.}_p \alpha \equiv x \in (\alpha \cap \mathbf{C}' P) - P'' \alpha \equiv x \text{mín.} (\overleftarrow{P}) \alpha.$$

$$50.36 \quad \vdash (\overrightarrow{\text{mín.}}_p \alpha = \wedge) \equiv (\alpha \cap \mathbf{C}' P) \subset \overleftarrow{P}'' \alpha.$$

$$50.37 \quad \vdash (\overrightarrow{\text{màx.}}_p \alpha = \wedge) \equiv (\alpha \cap \mathbf{C}' P) \subset P'' \alpha.$$

$$50.38 \quad \vdash \overrightarrow{\text{mín.}}_p \alpha = \hat{x} \{x \in (\alpha \cap \mathbf{C}' P) \ \& \ (\alpha \cap \overrightarrow{P}' x = \wedge)\}.$$

$$50.39 \quad \vdash \overrightarrow{\text{màx.}}_p \alpha = \hat{x} \{x \in (\alpha \cap \mathbf{C}' P) \ \& \ (\alpha \cap \overleftarrow{P}' x = \wedge)\}.$$

$$50.40 \quad \vdash \overrightarrow{\text{mín.}}_p \wedge = \wedge.$$

$$50.41 \quad \vdash \overrightarrow{\text{màx.}}_p \wedge = \wedge.$$

$$50.42 \quad \vdash P^2 \subset P \ \& \ x P y \rightarrow [\text{mín.}_p (\iota' x \cup \iota' y) = x].$$

$$50.43 \quad \vdash x \text{mín.}_p \alpha \rightarrow (\overline{x P x}).$$

$$50.44 \quad \vdash x \text{màx.}_p \alpha \rightarrow (\overline{x P x}).$$

IV. PUNTS SEGÜENTS. — Un element x s'anomena punt següent de la classe α respecte a la relació P (símbol $x \text{ seq.}_p \alpha$) quan x és el consegüent immediat, segons P , de tots els elements de α , o, més exacte, quan x és un mínim respecte a tots aquells elements relacionats amb P que vénen després de tots els elements de $\alpha \cap \mathbf{C}' R$.

Def. 50.04 $\text{seq.}_p \alpha = \overrightarrow{\text{mín.}}_p p' \overleftarrow{P}'' (\alpha \cap \mathbf{C}' P)$. Noteu que escrivim $p' \overleftarrow{P}'' (\alpha \cap \mathbf{C}' P)$ i no $\overleftarrow{P}'' (\alpha \cap \mathbf{C}' P)$, car aquesta expressió indica tots els consegüents de la classe $(\alpha \cap \mathbf{C}' P)$ i no tots són *següents* de $(\alpha \cap \mathbf{C}' P)$, ans solament els de la classe-producte $p' \overleftarrow{P}'' (\alpha \cap \mathbf{C}' P)$ que aplega els elements comuns a totes les classes de consegüents.

Si α posseeix un màxim, els següents (o el següent, si és una classe-unitat la formada per P segons les condicions 50.04) de α són els immediats successors del màxim: si α no el posseeix, no existirà un terme en α que sigui immediatament seguit d'un dels

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

diferents següents de α ; i, en aquest cas, si α posseeix un sol següent, aquest serà el seu límit superior. El predecessor de α serà, naturalment:

Def. 50.05 $\overrightarrow{\text{prec.}}_p \alpha = \overrightarrow{\text{màx.}}_p p' \overrightarrow{P''} (\alpha \cap C' P).$

I, si generalitzem les definicions per a qualsevol classe, tindrem:

Def. 50.041 $\text{seq.}_p = \hat{x} \hat{\alpha} \{x \text{ mín.}_p p' \overleftarrow{P''} (\alpha \cap C' P)\}.$

Def. 50.051 $\text{prec.}_p = \hat{x} \hat{\alpha} \{x \text{ màx.}_p p' \overrightarrow{P''} (\alpha \cap C' P)\}.$

Teoremes:

50.45 $\vdash \text{prec.}_p = \text{seq.} (\check{P}).$ Aquesta proposició permet de canviar totes les fórmules sobre precedents en les de següents; i inversament, posant en lloc de P , $\check{P}$, o viceversa; i per això donarem només les lleis sobre prec.

50.46 $\vdash P \varepsilon \text{ connex.} \rightarrow \overrightarrow{\text{seq.}}_p \alpha \varepsilon (0 \vee 1).$

50.47 $\vdash P \varepsilon \text{ connex.} \rightarrow \text{seq.}_p \varepsilon (1 \rightarrow \text{Cls.}).$

50.48 $\vdash \overrightarrow{\text{seq.}}_p \alpha \subset \alpha.$

50.49 $\vdash P^2 \subset J \rightarrow (\overrightarrow{\text{seq.}}_p \alpha \subset P'' \alpha).$

§ 51

Concepte logístic de límit

I. LÍMITS. — Un terme x s'anomena *límit superior* respecte a la classe α , dins el camp ordenat per la relació R , si α no posseeix un màxim i x és el següent de α . En aquest cas x segueix immediatament la classe α , encara que no puguem assenyalar en α un terme seguit immediatament de x . Següents que siguin ensembles límits són molt importants, i, amb *Prin. Math.*, els donarem un simbolisme especial: $lt'_p \alpha$ significarà límit superior de α segons P , i, quan convingui, escriurem també $lt (P)' \alpha$. Inversament, límit

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

inferior respecte a α segons P serà l'immediat predecessor de α , si α no posseeix un mínim. Símbol, $tl'_p \alpha$, o $tl(P)' \alpha$.

Def. 51.01 $lt(P) = seq_p \uparrow (-\mathfrak{Q}' \text{màx}_p)$. La relació de límit superior dins la relació P és la mateixa relació de següent segons P , però limitada a la classe $-\mathfrak{Q}' \text{màx}_p$. I, per tant:

Def. 51.02 $tl(P) = prec_p \uparrow (-\mathfrak{Q}' \text{mín}_p)$.

En virtut de les definicions donades, si α posseeix un màxim, no tindrà aleshores límit superior; per tant, l'existència de la classe dels límits (amb un o més elements) equival a l'existència de la classe dels següents, combinada amb la no-existència de la classe dels màxims en α .

Teoremes:

51.10 $\vdash x lt(P) \alpha \equiv x seq_p \alpha \ \& \ \overrightarrow{E! \text{màx}'_p \alpha}$.

51.11 $\vdash tl(P) = tl(\check{P})$; la qual cosa permet de reduir les consideracions següents a la teoria dels límits superiors.

51.12 $\vdash \overrightarrow{E! \text{màx}'_p \alpha} \rightarrow (\overrightarrow{lt'_p \alpha} = \wedge)$.

51.13 $\vdash (\overrightarrow{\text{màx}'_p \alpha} = \wedge) \rightarrow (\overrightarrow{lt'_p \alpha} = \overrightarrow{seq'_p \alpha})$.

51.14 $\vdash \overrightarrow{E! lt'_p \alpha} \equiv \overrightarrow{E! \text{màx}'_p \alpha} \ \& \ \overrightarrow{E! seq'_p \alpha}$.

51.15 $\vdash \overrightarrow{E! \text{màx}'_p \alpha} \vee \overrightarrow{E! seq'_p \alpha} \equiv \overrightarrow{E! \text{màx}'_p \alpha} \vee \overrightarrow{E! lt'_p \alpha}$.

51.16 $\vdash \overrightarrow{lt'_p \alpha} \wedge = \overrightarrow{B' P}$.

51.17 $\vdash P \in \text{connex.} \rightarrow \{ \overrightarrow{lt'_p \alpha} \in (0 \vee 1) \ \& \ lt_p \in (1 \rightarrow Cls) \}$.

En molts casos convé d'emprar una notació única per a significar les alternatives «límit o bé màxim», «límit o bé mínim». Definirem, doncs:

Def. 51.03 $\text{limax}_p = \text{màx}_p \cup lt_p$.

Def. 51.04 $\text{limin}_p = \text{mín}_p \cup t_p l$.

I és clar que $\text{limin}_p = \text{limax}(\check{P})$.

II. RELACIÓ DEDEKINDIANA. — Una relació P s'anomena dedekindiana, si qualsevol classe d'elements ordenats per P posseeix o bé un màxim o bé un següent.

Def. 51.05 $\text{Ded} = \hat{P} \{ (\alpha) [\alpha \in (\mathfrak{Q}' \text{màx}_p \cup \mathfrak{Q}' \text{seq}_p)] \}$.

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

Teoremes:

$$51.18 \quad R \in \text{Ded} \equiv (\alpha) \{ \alpha \in \mathbf{Q}' \text{ limax}_R \}.$$

$$51.19 \quad R \in \text{Ded} \rightarrow E! \overrightarrow{B'} R \ \& \ E! \overrightarrow{B'} \check{R}.$$

És clara l'analogia amb les condicions dedekindianes de continuïtat i teoria de les seccions (Schnitt) de racionals en dues classes, una amb un màxim i sense següent, o bé sense màxim; i aleshores amb un següent en cas de continuïtat.

III. DERIVADES. — Si α és una classe qualsevol i P una relació serial, la derivada primera de α , segons P , és la classe o conjunt dels límits de les subclasses de $\alpha \cap \mathbf{C}' P$; això és,

$$l_p'' \text{ Cl ex}' (\alpha \cap \mathbf{C}' P).$$

Amb altres paraules: un element x pertany a la derivada primera de α segons P , si existeix un conjunt de termes que es troben continguts alhora en α i en $\mathbf{C}' P$, i x és llur límit. La classe de tots aquests termes és la derivada de α segons P : símbol, $\delta_p' \alpha$.

Def. 51.06 $\delta_p'' \alpha = l_p'' \text{ Cl ex}' (\alpha \cap \mathbf{C}' P)$.

I d'una manera semblant definirem δ_p'' , $\delta_p''' \alpha$

En general, existiran membres en α que no es trobaran dins $\delta_p' \alpha$ i membres de $\delta_p' \alpha$ que no seran en α ; car el camp de P no enclourà tots els elements de α , o bé alguns dels límits enclosos en $\delta_p' \alpha$ no pertanyen a la classe α .

IV. RELACIÓ DENSA. — La classe α s'anomenarà densa respecte a la relació P , si tots els seus membres, fora del primer, si n'hi ha en α , pertanyen a $\delta_p' \alpha$, o sigui, si tots els seus membres, tret del primer, són límits de subclasses existents en α .

Def. 51.07 densa ' $P = \hat{\alpha} [(\alpha \xrightarrow{\text{---}} \text{mín}' \alpha) \subset \delta_p' \alpha]$.

La classe α s'anomenarà closa en P , si qualsevol subclasse no buida de α , que no posseeixi un màxim, té, amb tot, un límit que pertany a α .

Si α és ensems densa i closa s'anomenarà perfecta; i en aquest cas tots els seus termes són límits de classes triades dins α , i cada una d'elles posseeix un límit o un màxim.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Def. 51.08

Closa $'P = \hat{\alpha} \{ Cl\ ex' (\alpha \cap C'P) \subset \mathfrak{Q}' \limax_p \& (\mathfrak{E}'_p \alpha \subset \alpha) \}$.

Def. 51.09 Perf $'P = \text{densa } 'P \cap \text{closa } 'P$.

§ 52

Convergència. Continuïtat. Límits de funcions.

I. CONVERGÈNCIA. — Una funció definida logísticament equival a una relació en la qual els antecedents corresponen als valors de la variable independent, i els consegüents són els valors de la variable dependent o funció. La llei mateixa d'unió entre ambdues classes és la relació R . V. gr., la funció $y = \frac{x}{2}$ equival a la relació « y és la meitat de x ». Donem, amb tot, en logística un significat molt més ample al terme funció que el corresponent de matemàtiques. Funció és aquí un altre terme de relació: de manera que les nocions següents, essent i tot purament lògiques, corresponen com a cas particular a les matemàtiques.

Direm que els valors d'una funció convergeixen o que la funció convergeix dins la classe α , si per a arguments suficientment distants, això és, havent emprat cadenes relacionals suficientment llargues, els valors de la funció romanen encara dins la classe α . Amb una definició més tècnica: sigui R la funció considerada, α la classe en qüestió, Q una relació serial a la qual pertanyen tots els arguments o variables emprats en R i en α : direm que R convergeix dins α respecte de Q , si existeix un argument y tal que per a arguments superiors a (y) segons l'ordre establert per la relació serial Q , el valor de R roman sempre en α .

R és consegüentment convergent dins α segons Q , si

$$(E\ y) \{ y \in (C'Q \cap \mathfrak{Q}'R) \& R''\overleftarrow{Q}'y \subset \alpha \}.$$

Un terme y amb aquestes condicions direm que pertany a la classe $R\overleftarrow{Q}_{en}\alpha$, símbol del concepte definit. I, per tant, R serà

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

convergent dins α segons Q , si la classe $R \overline{Q}_{cn} \alpha$ no és nulla. Posem, doncs, com a definicions estrictes:

Def. 52.01 $R \overline{Q}_{cn} \alpha = (C' Q \cap Q' R) \cap \hat{y} (R'' \overleftarrow{Q}' y C \alpha)$.
I generalitzant per a qualsevol α , obtindrem el concepte general de convergència.

Def. 52.02 $Q_{cn} = \hat{R} \hat{\alpha} (E! R \overline{Q}_{cn} \alpha)$.

En els casos d'importància pràctica, R és una funció uniplurívoca, Q és una sèrie i la classe $C' Q \cap Q' R$ serà una classe sense màxim en Q .

La definició precedent de convergència es refereix a la relació sencera R . Ara podem generalitzar aquesta definició per a qualsevol propietat de R (en la classe de les quals resta, naturalment, R mateix enclosa) i fixar les condicions per a la seva convergència,

Per aquest fi cal considerar $R \downarrow \overleftarrow{Q}'_* z$, on z pertany als termes superiors o iguals a un y prefixat per endavant. Si sota aquestes condicions $R \downarrow \overleftarrow{Q}'_* z$ pertany sempre a la classe λ , direm que R pertany també sempre a λ ; i a la classe λ correspon una funció proposicional, a saber, la propietat considerada en ordre a la convergència.

Def. 52.03 $R \overline{Q}_{eng} \lambda = \hat{y} \{ y \in (C' Q \cap Q' R) \ \& \ \hat{z} (z) (y Q_* z \rightarrow R \downarrow \overleftarrow{Q}'_* z \in \lambda) \}$.

(El subíndex *eng* és una abreviació de convergència general.)

Def. 52.04 $Q_{eng} = \hat{R} \hat{\lambda} (E! R \overline{Q}_{eng} \lambda)$.

Teoremes:

52.10 $\vdash y \in R \overline{Q}_{cn} \alpha \equiv y \in (C' Q \cap Q' R) \ \& \ R'' \overleftarrow{Q}'_* y C \alpha$.

52.11 $\vdash \alpha C \beta \rightarrow (R \overline{Q}_{cn} \alpha C R \overline{Q}_{cn} \beta)$.

52.12 $\vdash \alpha C \beta \rightarrow (R Q_{cn} \alpha \rightarrow R Q_{cn} \beta)$.

52.13 $\vdash R \overline{Q}_{cn} \alpha \cap R \overline{Q}_{cn} \beta = R \overline{Q}_{cn} (\alpha \cap \beta)$.

52.14 $\vdash R \overline{Q}_{cn} (\alpha \cap \beta) \rightarrow (R Q_{cn} \alpha \ \& \ R Q_{cn} \beta)$.

II. SECCIONS LIMITADORES. OSCIL·LACIONS D'UNA FUNCIO. —
Definirem abans que tot el concepte de secció dins una sèrie P ,

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

i direm que la classe α és una *secció* de P (sect ' P ') si val

$$\alpha \subset C' P \& P'' \alpha \subset \alpha.$$

Si la classe α pertany al camp de P i ensems la classe dels predecessors de α (de tots els elements que tenen amb qualsevol dels de α , la relació P) pertany sempre a α . Si existeix α , el $C' P$ queda aleshores dividit en dues parts: hem fet una secció. Definirem, doncs, en general:

Def. 52.05 sect ' $P = \hat{\alpha} (\alpha \subset C' P \& P'' \alpha \subset \alpha)$. Si α és una secció de P , la classe $C' P - \alpha$ s'anomenarà el complement de α dins P , que serà, naturalment, una classe idèntica a sect ' P '.

Per tal de definir ara una *secció limitadora* necessitem tres relacions P, Q, R : P és la sèrie dins la qual fem la secció (formant les dues classes α i $C' P - \alpha$); R és una relació els arguments de la qual pertanyen a la sèrie P , i Q és la sèrie que encloou tots els arguments (o valors de la variable independent) que anirem donant a R per tal que ella, amb la seva estructura, cerqui els valors dependents dins la *classe-secció*.

Considerem ara un terme x de $C' P$ tal que per molt elevats que siguin els arguments de R (això és, assolits amb potències molt elevades de R) siguin sempre majors o iguals (com a màxim) a x . Aquests termes s'anomenaran *persistents* segons P . La classe de tots els termes persistents s'anomena *secció limitadora*. Per a la seva definició logística perfecta notem: si α és una classe dins la qual R és convergent, fent Q de relació serial (de camp de la variable independent), aleshores la secció $P'' \alpha$ (dels antecessors de α , segons totes les potències de $P, P^0, P, P^2, \dots$) conté valors que sempre resten enclosos en α . És per això que si x és un membre qualsevol d'aquesta secció, i prenem termes suficientment alts de la sèrie Q , els valors corresponents de R no restaran sempre menors que x dins la sèrie P , i, per tant, el producte lògic de termes del tipus $P'' \alpha$ serà la secció limitadora. Definirem, doncs:

Def. 52.06 $P \bar{R}_{sc} Q = p' (P'' \bar{Q}'_{cn} R \cap C' P)$. (sc alludeix a secció.)

Partint dels arguments de Q (com de variable independent relacional) i emprant-los com a antecedents de la relació R , cer-

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

carem, mitjançant R mateixa, els seus consegüents dins els elements de la relació P . Avançant dins el camp de la variable independent Q (emprant cada vegada potències majors de Q), avançarem a través R dins P . Suposem ara que dins P existeixen termes tals, que els arguments assolits en P , partint de Q , restin sempre majors o iguals que algun d'ells. La classe formada amb ells és la *secció limitadora* de la relació R dins la sèrie P ; tot avançant amb les potències de R al llarg del camp de P , avenç regulat pel de Q dins el seu camp. La secció limitadora es troba, doncs dins P ; la determinem, la limitem, mitjançant R , i el moviment limitador de fixació de fronteres, diguem-ho així, és dirigit per Q .

Considerem la secció limitadora formada dins $\check{P}$, això és, $\check{P} \bar{R}_{sc} Q$; s'anomenarà «secció limitadora superior». Si x és un element d'ella, la funció R mai no arribarà a un valor major que x .

Suposem, doncs, que x pertany a $P \bar{R}_{sc} Q$ i a $\check{P} \bar{R}_{sc} Q$; aleshores trobarem valors de R que no són menors que x i altres que no són majors que x , tot avançant les potències de Q , i, per tant, de R . Els elements de la classe $P \bar{R}_{sc} Q \cap \check{P} \bar{R}_{sc} Q$ són la classe dels valors supremes de R i mereix el nom d'«oscil·lació de la funció R », oscil·lació que s'anomena «final», puix que, aconseguint nous arguments de R , avançant més i més amb potències de la mateixa R , els valors de la funció (els consegüents de R) oscil·len dins aquesta classe o segment de P , i cap altre segment més petit no posseeix aquesta propietat. Aquesta classe o segment serà designat amb $P \bar{R}_{os} Q$ (*os*, alludeix a oscil·lació) i s'anomena també «segment limitador». Per tant, si R posseeix un terme final, avançant més i més els exponents de les potències de R vers ∞ , el segment limitador contindrà només un terme.

Def. 52.07 $P \bar{R}_{os} Q = P \bar{R}_{sc} Q \cap \check{P} \bar{R}_{sc} Q$.

Notem els tres teoremes que formulen les condicions de pertinença de x a la secció limitadora:

$$52.15 \quad \vdash x \in P \bar{R}_{sc} Q \equiv (\alpha) \{ R Q_{cn} \alpha \rightarrow x \in P'' \alpha \ \& \ x \in C' P \}.$$

$$52.16 \quad \vdash x \in P \bar{R}_{sc} Q \equiv \{ y \in (C' Q \cap D' R) \ \& \ (y) (\alpha) [(R'' \check{Q}' y C \alpha) \rightarrow (x \in P'' \alpha \ \& \ x \in C' P)] \}.$$

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

$$52.17 \quad \vdash x \in P \bar{R}_{sc} Q \equiv (y) [y \in (C' Q \cap Q' R) \rightarrow \\ \rightarrow x (P_* | R | \check{Q}_*) \text{ y } \& x \in C' P].$$

Aquest darrer teorema és el més clar per a entendre quan un element x pertany a la secció limitadora.

Aquests conceptes són purament lògics, encara que puguin ésser aplicats als corresponents matemàtics, que són només un cas particular per a relacions de tipus matemàtic. Un exemple d'aplicació extramatemàtica. Siguin els elements de Q un conjunt de punts temporals, diem segons, ordenats per la relació abans-després (relació serial Q). Els elements de P siguin els punts d'una recta, P la relació d'ordre entre ells. R serà una llei de moviment que determina per a cada valor del temps (això és, per a cada element de Q) un lloc determinat dins la recta (un element de P). La relació R té com a antecedents els punts temporals i com a conseqüents punts (no diem tots sempre) espacials i R mateixa és la llei o funció $f(t)$; R relaciona el camp de Q amb el de P . És molt fàcil de formar lleis $f(t)$ tals que per a qualsevol temps, tan llarg com voldrem, la funció R no arribi a un punt determinat de la línia o no en passi; i aquest punt amb els següents dins P serà la secció limitadora superior, o bé existirà un altre punt dins la línia, tal que la posició determinada per $f(t)$ sempre es trobi més enllà d'ell o, tot al més, dins; i aquest punt i els seus precedents formaran la secció limitadora inferior. Finalment, podrà esdevenir-se que existeixin per a determinades $f(t)$ ambdues seccions i els punts comuns a elles formaran una classe de valors dins la qual es mourà $f(t)$, si prenem valors suficientment elevats de Q (i, per tant, de R i de P).

De semblant manera podem definir l'oscil·lació d'una funció R quan els arguments de Q s'atansen a un límit determinat en lloc de considerar el cas anterior en el qual els arguments de Q (o valors de la variable independent que fan d'antecedents de R) creixen sense límit. Si limitem, doncs, el camp de la relació Q als elements continguts en la classe α , podrem obtenir noves oscil·lacions i seccions de R dins P , en atansar-se Q a un element determinat dins α ; i definirem:

$$\text{Def. 52.08} \quad (P \bar{R} Q)'_{sc} \alpha = P \bar{R}_{sc} (Q_* \upharpoonright \alpha).$$

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

Def. 52.09 $(P \bar{R} Q)'_{os} \alpha = P \bar{R}_{os} (Q_* \uparrow \alpha)$.

Les lleis dels altres casos són molt semblants a les anteriors.

III. LÍMITS DE LES FUNCIONS. — Poden existir, en general, quatre límits d'una funció o relació R quan els arguments de Q s'atansen a un terme especial a : el límit superior, el límit inferior d'oscil·lació, tendint vers ells per la dreta o per l'esquerra. Designem els quatre límits amb:

(límit superior)	(límit inferior)
$R (P Q)' a, R (\breve{P} Q)' a$	$R (P \breve{Q})' a, R (\breve{P} \breve{Q})' a$

Amb les definicions:

Def. 52.010 $R (P Q)' a = \limsup_p (P \bar{R} Q)'_{sc} \vec{Q}' a$, i semblants definicions per a les altres expressions, canviant P amb $\breve{P}$, Q amb $\breve{Q}$, $\limsup$ amb $\liminf$, segons els casos. Si, per exemple, Q és una sèrie de nombres racionals i P la sèrie dels nombres reals, i α una classe de relacionals *sense límit racional*, podem esguardar el límit de la funció R (si existeix) en créixer els arguments de Q dins α , com el valor de la funció R per al límit *irracional* de α .

§ 53

Continuïtat de les funcions

I. CONTINUÏTAT. — Una funció $f(x)$ és contínua en el punt $x = a$, en el qual té el valor $f(a)$, si el límit dels valors de la funció dita a dreta i esquerra de a és únic i igual a $f(a)$. Si recordem les definicions de límits de funcions suau formulades, això equival a demanar:

53.10 $\vdash R (P Q)' a = R (\breve{P} Q)' a = R (P \breve{Q})' a = R (\breve{P} \breve{Q})' a = R' a$.
Aquesta condició purament lògica ens indica que la noció de continuïtat no és específicament matemàtica.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

II. CONTINUÏTAT DEDEKINDIANA I CANTORIANA. — Una relació R (o la corresponent funció) s'anomena «de continuïtat dedekindiana» — $R \varepsilon \text{Dedek}$ —, si R és una relació dedekindiana (§ 51, II) transitiva i densa, això és:

Def. 53.01 $\text{Dedek} = \text{Ded} \cap \hat{R} (R^2 = R)$.

Respecte a les sèries, aquesta condició equival a demanar que les classes que tinguin un màxim no posseiran un següent.

53.11 $\vdash R \varepsilon \text{ser} \rightarrow$

$\rightarrow \{ R \varepsilon \text{Dedek} \equiv [\mathfrak{d}' \text{màx} (R) = - \mathfrak{d}' \text{seq} (R)] \}$.

Aquí trobem l'equivalent purament lògic de la definició de continuïtat de Dedekind.

Per tal de definir la continuïtat cantoriana hem d'introduir el concepte de *classe intermèdia* dins R ; símbol, $\alpha \text{ med } R$ (med, abreviació de *mèdium*).

Si α és una part del $\mathbf{C}' R$ i entre qualsevol parell de valors de R existeix un element de la classe α (per tant, R ha d'ésser una relació densa), α és anomenada classe intermèdia dins R .

Def. 53.02 $\text{med} = \hat{\alpha} \hat{R} \{ (\alpha \mathbf{C} \mathbf{C}' R) \& R \mathbf{C} R \vdash \alpha | R \}$.

Ara, doncs, una relació o funció R s'anomena contínua, amb continuïtat cantoriana, si és una sèrie dedekindiana i posseeix una classe intermèdia amb $\aleph_0$ elements. Definim la classe θ de totes les relacions que compleixen aquestes condicions.

Def. 54.03 $\theta = \text{ser} \cap \text{Ded} \cap \widetilde{\text{med}}'' \aleph_0$.

Qualsevol relació contínua posseeix sempre la continuïtat dedekindiana, però no val la inversa. La classe intermèdia que hem definit per a qualsevol classe d'elements, lògics o no, equival dins la teoria dels conjunts al conjunt enumerable introduït per Cantor dins la definició del continu.

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

§ 54

Sèries ben ordenades i nombres ordinals

I. SÈRIE BEN ORDENADA. — Una relació R s'anomena ben ordenada si qualsevol subclasse no buida del seu camp posseeix almenys un mínim; i si ens limitem a la consideració de relacions serials, una sèrie ben ordenada té en cada una de les seves subclasses no buides un primer terme. La classe de les relacions ben ordenades serà simbolitzada amb Bord (abreviació de bene ordinata), i la classe de totes les sèries ben ordenades, amb Ω .

Def. 54.01 $\text{Bord} = \hat{P} [\text{Cl ex}' \mathbf{C}' P \mathbf{C} \mathbf{Q}' \text{mín} (P)].$

Def. 54.02 $\Omega = \text{Ser} \cap \text{Bord}.$

Teoremes:

54.10 $\vdash P \in \text{Bord} \equiv (\alpha) \{E! (\alpha \cap \mathbf{C}' P) \rightarrow E! \overrightarrow{\text{mín}}_{\alpha} \alpha\}.$

54.11 $\vdash P \in \text{Bord} \equiv P_{p_0} \in \text{Bord}.$

54.12 $\vdash \text{connex.} \cap \text{Bord} = \Omega.$

54.13 $\vdash P \in \text{Bord} \rightarrow (R' P \mathbf{C} \text{Bord}).$

54.14 $\vdash P \in \text{Bord} \rightarrow P \upharpoonright \alpha \in \text{Bord}.$

54.15 $\vdash P \in \text{Bord} \rightarrow (R' P \cap \text{connex.} \mathbf{C} \Omega).$

54.16 $\vdash P \in \Omega \ \& \ E! B' \check{P} \rightarrow P \in \text{Ded}.$

54.17 $\vdash \text{Bord} = \hat{P} \{x \in \mathbf{C}' P \ \& \ (\sigma) (x) [(\overrightarrow{P}' x \mathbf{C} \sigma \rightarrow x \in \sigma) \rightarrow \mathbf{C}' P \mathbf{C} \sigma]\}.$

Una relació ben ordenada és qualsevol relació P el camp de la qual es trobi contingut en qualsevol classe σ , que conté els membres de $\mathbf{C}' P$ els predecessors dels quals siguin tots continguts en σ . Si a la classe σ correspon una propietat, podem dir que és heretada per tots els x del $\mathbf{C}' P$. Tenim una llei d'herència transfinita.

54.18 $\vdash \alpha \in \text{Cl}'' \Omega \rightarrow E! \varepsilon'_{\Lambda} \text{Cls ex}' \alpha.$

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

54.19 $\vdash \alpha \in Cl'' \Omega \ \& \ \beta \subset \alpha \rightarrow E! \ \varepsilon'_\Delta \ Cls \ ex' \ \alpha.$

54.20 $s' \ k \in Cl'' \Omega \ \& \ \bigwedge \bar{\varepsilon} \ k \rightarrow E! \ \varepsilon'_\Delta \ k.$ $C'' \Omega$ és la classe de totes les classes que poden ésser ben ordenades. Les tres lleis demostren que si una classe és ben ordenada, val per a ella l'axioma multiplicatiu, o és possible formar una classe de representants per a totes les seves subclasses no buides; i el mateix val per a una classe de classes ben ordenades amb la condició natural $\bigwedge \bar{\varepsilon} \ k.$

54.21 $(C'' \Omega \cup 1 = Cls) \rightarrow \text{Mult ax.}$ Si una classe ben ordenada posseeix més d'un element, val per a ella l'axioma multiplicatiu. La proposició inversa «si val l'axioma multiplicatiu, podem formar una classe de classes ben ordenades, o sigui, qualsevol classe pot ésser ben ordenada», és el teorema de Zermelo.

54.22 $\vdash P, Q \in \Omega \ \& \ P \text{ smor } Q \rightarrow (P \overline{\text{smor}} Q \in 1).$

II. NOMBRES ORDINALS. — Els nombres relacionals de les sèries ben ordenades s'anomenen *nombres ordinals*. La classe de total d'aquests nombres (NO) és definida:

Def. **54.03** $NO = Nr'' \Omega.$ I tenim com a teoremes:

54.23 $\vdash \alpha \in NO \equiv (E P) \ \& \ P \in \Omega \ \& \ (\alpha = Nr' P).$

54.24 $\vdash P \in \text{Bord} \ \& \ P \text{ smor } Q \rightarrow Q \in \text{Bord}.$

54.25 $\vdash P \in \Omega \ \& \ P \text{ smor } Q \rightarrow Q \in \Omega.$

54.26 $\vdash P \in \text{Bord} \rightarrow (Nr' P \subset \text{Bord}).$

54.27 $\vdash \alpha \in NO \rightarrow \alpha \subset \Omega.$

54.28 $\vdash O, 2_r \in NO.$

La relació de menor que (i la seva inversa de major que) entre sèries ben ordenades es defineix de la següent manera:

Def. **54.04** Menor = $\hat{P} \hat{Q} \{ P, Q \in \Omega \ \& \ E! (Rl' Q \cap Nr' P) \ \& \ (\overline{P \text{ smor } Q}) \}$, i, per tant:

54.29 $\vdash P \text{ menor } Q = P, Q \in \Omega \ \& \ E! (Rl' Q \cap Nr' P) \ \& \ (\overline{P \text{ smor } Q}).$

54.30 $\vdash P, Q \in \Omega \ \& \ E! (Rl' P \cap Nr' Q) \ \& \ E! (Rl' Q \cap Nr' P) \rightarrow (P \text{ smor } Q).$

Llei anàloga per a ordinals a la de Bernstein-Schröder (42.23).

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

I de dos nombres ordinals μ , ν direm que μ és menor que ν , si tenim:

Def. 54.05 $\mu < \nu = (E P, Q) \ \& \ (\mu = Nr' P) \ \& \ (\nu = Nr' Q) \ \& \ (P \text{ menor } Q)$.

III. RELACIÓ HEREDITÀRIA TRANSFINITA. INDUCCIÓ TRANSFINITA. — Tractarem ara d'estendre les nocions de R_* i R_{po} . Cal emprar per a aquest fi dues relacions R , Q . Comencem definint la posteritat transfinita d'un terme respecte a R , Q , això és, eixamblem la noció de $\overleftarrow{R}'_* x$. Suposem, per tal de simplificar, que Q posseeix un caràcter més o menys serial, i que R és una relació pluriunívoca continguda dins Q . Per tal de formar la posteritat transfinita de x respecte a R , Q , sortirem de x i formarem segons el mètode ordinari la posteritat ordinària de x respecte a R solament, això és, $\overleftarrow{R}'_* x$, emprant potències el més elevades possible. Si la classe sencera $\overleftarrow{R}'_* x$ posseeix un límit respecte a Q , començarem de bell nou amb ell, considerant-lo com al primer terme de la posteritat transfinita de x respecte a R , Q . Si aquest límit és (y) formarem de nou $\overleftarrow{R}'_* y$, i farem amb el seu límit dins Q el mateix que amb el límit de $\overleftarrow{R}'_* x$, bastint d'aquesta manera la posteritat transfinita de x , segons R , Q , continuant el procés fins que arribem a termes del $\mathbf{D}' R$, o bé classe del $\mathbf{Q}' \mathcal{U}_Q$. Prenent aleshores tots els termes que puguin ésser assolits amb aquest procés formarem la posteritat transfinita de x segons R , Q , que serà simbolitzada amb $(R_* Q)' x$.

Per tal d'obtenir ara una definició tècnica d'aquesta classe, anomenem σ classe hereditària transfinita si val, no solament $R'' \sigma \subset \sigma$, com en les classes hereditàries ordinàries, sinó també que qualsevol subclasse μ continguda en $(\sigma \cap \mathbf{C}' Q)$, i que tingui ensem un límit dins Q , siguin aquests límits membres de σ . Segons això, σ enclou, no solament tots els successors segons R de qualsevol membre de σ , ans encara els límits dins Q de qualsevol subclasse μ no buida de $(\sigma \cap \mathbf{C}' R)$, això és, $\check{R}'' \sigma \subset \sigma$ i $\mu \subset \sigma \ \& \ (\mu) E! (\mu \cap \mathbf{C}' Q) \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{U}}'_Q \mu \subset \sigma$; i, recordant la definició lò-

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

gica de derivada primera (51.06) d'una classe respecte a Q , la condició anterior es redueix a $\delta'_Q \sigma \subset \sigma$. Una classe σ és, doncs, hereditària respecte a Q , R , si val

$$\check{R}'' \sigma \cup \sigma \subseteq \delta'_Q \sigma \subset \sigma.$$

I ara podem definir la posteritat transfinita de x respecte a R , Q , dient que consisteix en tots els membres de $\mathbf{C}' R$ que pertanyen a qualsevol classe hereditària transfinita (amb la qual cosa són hereditàries les propietats transfinites corresponents) a la qual x pertanyi:

Def. 54.06 $\vdash (R_* Q)' x = \mathbf{C}' Q \cap \hat{y} \{x \in \sigma \& \check{R}'' \sigma \subset \sigma \& (\sigma) (\delta'_Q \sigma \subset \sigma) \rightarrow y \in \sigma\}$.

Obtindrem ara l'anàleg de R_{po} , limitada a la posteritat de x sense incloure x mateix en ella, limitant Q , $Q \upharpoonright (R_* Q) x$, naturalment en el cas en què Q sigui transitiva; $Q \upharpoonright (R_* Q) x$ s'escriu, més breument, $Q(R, x)$, o, Q_{RX} .

Condicions perquè un terme y es trobi dins la posteritat transfinita de x :

$$54.31 \quad \vdash y \in (R_* Q)' x \equiv (y \in \mathbf{C}' Q) \& x \in \sigma \& (\sigma) [(\check{R}'' \sigma \cup \delta'_Q \sigma) \subset \sigma \rightarrow y \in \sigma].$$

$$54.32 \quad \vdash y \in (R_* Q)' x \equiv (y \in \mathbf{C}' Q) \& [x \in \sigma \& \check{R}'' \sigma \subset \sigma \& \mu \subset \sigma \& E! (\mu \cap \mathbf{C}' Q) \rightarrow_\mu \overrightarrow{lt'_Q} \mu \subset \sigma] \rightarrow_\sigma y \in \sigma.$$

$$54.33 \quad \vdash (R_* Q)' x \subset \mathbf{C}' Q.$$

$$54.34 \quad \vdash x \in \mathbf{C}' Q \equiv x \in (R_* Q)' x.$$

$$54.35 \quad \vdash R \subseteq Q \& y \in (R_* Q)' x \rightarrow \overleftarrow{R}' y \subset (R_* Q)' x.$$

$$54.36 \quad \vdash R \subseteq Q \& \mu \subset (R_* Q)' x \rightarrow \check{R}'' \mu \subset (R_* Q)' x.$$

$$54.37 \quad \vdash R \subseteq Q \rightarrow [\check{R}'' (R_* Q)' x \subset (R_* Q)' x].$$

$$54.38 \quad \vdash (R \subseteq Q \& x \in \mathbf{C}' Q) \rightarrow [\overleftarrow{R}'_x x \subset (R_* Q)' x].$$

$$54.39 \quad \vdash [\mu \subset (R_* Q)' x \& E! \mu \rightarrow \overrightarrow{lt'_Q} \mu \subset (R_* Q)' x].$$

$$54.40 \quad \vdash \delta'_Q (R_* Q)' x \subset (R_* Q)' x.$$

$$54.41 \quad \vdash [k \subset Cl ex' (R_* Q)' x] \rightarrow [\overrightarrow{lt'_Q} k \subset (R_* Q)' x].$$

$$54.42 \quad \vdash y \in (R_* Q)' x \& z \in (R_* Q)' y \rightarrow z \in (R_* Q)' x.$$

$$54.43 \quad \vdash x \in (\mathbf{C}' Q - \mathbf{D}' R) \rightarrow [(R_* Q)' x = \iota' x].$$

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

IV. TEOREMA DE ZERMELO. — Admet les següents formulacions lògiques; en qualsevol d'elles pot ésser demostrat amb els mitjans lògics: les demostracions, però, són massa complicades per a una introducció (Cf. *Prin. Math.*, 258).

54.44 $\vdash \mu \bar{\varepsilon} 1 \ \& \ E! \ \varepsilon'_\Delta \text{ Cl ex' } \mu \rightarrow \mu \varepsilon \mathbf{C}'' \Omega$. Si μ és una classe no buida i existeix almenys una classe de relacions selectives per a totes les subclasses no buides de μ , podem afirmar que la classe μ és una de les classes que poden ésser ben ordenades: o, més breument, qualsevol classe no nul·la, si emprem l'axioma multiplicatiu, pot ésser ben ordenada. I fins podem provar que

54.45 $\vdash \mu \varepsilon \mathbf{C}'' \Omega \equiv \mu \bar{\varepsilon} 1 \ \& \ E! \ \varepsilon'_\Delta \text{ Cl ex' } \mu$; o bé:

54.46 $\vdash \mu \varepsilon (\mathbf{C}'' \Omega \cup 1) \equiv E! \ \varepsilon'_\Delta \text{ Cl ex' } \mu$. I aleshores:

54.47 $\vdash \text{Mult ax} \equiv (\mathbf{C}'' \Omega \cup 1 = \text{Cl})$.

54.48 $\vdash \text{Mult ax} \rightarrow (Nc' \alpha < Nc' \beta) \vee (Nc' \alpha = Nc' \beta) \vee (Nc' \alpha > Nc' \beta)$.

Teorema de comparabilitat segons les relacions $<$, $>$, $=$ de qualsevol conjunt, admetent l'axioma multiplicatiu, provat que aquest axioma equival a demanar que qualsevol classe pot ésser ben ordenada.

54.49 $\vdash \text{Mult ax} \rightarrow (\mu, \nu, \varepsilon N_0 C) \rightarrow [(\mu \leq \nu) \vee (\mu > \nu)]$.

V. SÈRIES COMPACTES (überall dicht, de Càntor). — Si R és una relació tal que entre dos qualssevol dels seus elements sempre n'existeix un altre lligat mitjançant R amb els altres dos membres, la relació R s'anomena compacta; i la classe de totes elles formarà la definició de relació compacta (comp):

Def. **54.07** $\text{comp} = \hat{P} (P \subset P^2)$.

Teoremes:

54.50 $\vdash P \varepsilon \text{comp} \equiv P \subset P^2$.

54.51 $\vdash P \varepsilon \text{comp} \equiv (x) (y) [x P y \rightarrow E! (\overleftarrow{P'} x \cap \overleftarrow{P'} y)]$.

54.52 $\vdash P \varepsilon \text{comp} \equiv \check{P} \varepsilon \text{comp}$.

54.53 $\vdash P \varepsilon Tr \cap \text{comp} \equiv (P = P^2)$.

54.54 $\vdash P \varepsilon \text{comp} \rightarrow \overrightarrow{E! \max'_p P' x}$.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

$$54.55 \quad \vdash P \in \text{comp} \rightarrow \overline{E}! \xrightarrow{\text{seq}'_p} \iota'' x.$$

54.56 $\vdash P \in Rl' J \cap \text{comp} \rightarrow (D' \mathcal{U}_p = C' P)$. Si una relació és compacta i una subclasse de la relació diversitat, qualsevol membre del seu camp és un punt límit.

$$54.57 \quad \vdash P \in (\text{comp} - \iota' \wedge) \rightarrow P \in \text{Bord}.$$

$$54.58 \quad \vdash P \in \text{comp} \rightarrow (Nr' P \subset \text{comp}).$$

VI. SÈRIES RACIONALS (η). — Les sèries que són isomorfes (§ 46) amb la sèrie de les fraccions racionals pròpies, ordenades segons magnitud, s'anomenen sèries racionals. Entre moltes maneres possibles, ordenem totes les fraccions pròpies de la següent:

$$\eta = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Amb la definició clàssica de Càntor direm que les sèries racionals η són sèries denses sense membres inicials i finals el camp de les quals posseeix $\aleph_0$ elements.

$$\text{Def. 54.08} \quad \eta = \hat{R} \left\{ R \in \text{ser} \ \& \ R \subset R^2 \ \& \ C' R \in \aleph_0 \ \& \right. \\ \left. (D' R = C' R) \right\}.$$

Teoremes:

$$54.59 \quad \vdash P, Q \in \eta \rightarrow P \text{ smor } Q.$$

$$54.60 \quad \vdash P \in \eta \ \& \ P \text{ smor } Q \rightarrow Q \in \eta.$$

$$54.61 \quad \vdash P \in \eta \rightarrow (\eta = Nr' P).$$

$$54.62 \quad \vdash \eta \in N R.$$

VII. DEFINICIÓ LÒGICA DE GRUP. — El concepte de grup, un dels cabdals de les matemàtiques modernes, admet una traducció logística molt senzilla. Prenguem una classe d'elements entre els quals existeixi una mena d'unió o operació que anomenarem grup si compleix les següents condicions: 1.^a El resultat d'aplicar l'operació a dos elements de la classe pertany a la mateixa classe. 2.^a Per a l'operació val la propietat associativa. 3.^a Existeix un element-unitat tal, que unint-hi, mitjançant l'operació, qualsevol dels elements de la classe, dona per resultat el mateix element primitiu. 4.^a Per a cada element ha d'existir dins

CONSTRUCCIÓ LÒGICA

la classe un element invers, de manera que la unió d'ambdós mení com a resultat a l'element-unitat. Una anàlisi lògica palesa que els elements d'un grup són relacions (λ) i l'operació o unió és l'operació relacional-concatenació. Per tant:

Def. 54.09 Grup = $\hat{\lambda} \{ (P, Q) [P, Q \varepsilon \lambda \rightarrow P | Q \varepsilon \lambda \ \& \ \check{P} \varepsilon \lambda] \ \& \ (I \vdash s' C'' \lambda) \varepsilon \lambda \}$.

Ací l'element-unitat és la identitat, I , limitada al conjunt o suma de tots els elements dels camps de les relacions contingudes en λ ; l'element invers de $\check{P}$ és P : no cal pas formular explícitament la condició d'associativitat, puix que val per a totes les concatenacions, segons 36.12.

Si val per a la unió la propietat commutativa, obtenim el grup més retringit d'Abel:

Def. 54.010 Abel = $\hat{\lambda} \{ \lambda \varepsilon \text{grup} \ \& \ (P, Q) [P, Q \varepsilon \lambda \rightarrow (P | Q = Q | P)] \}$.

El grup cíclic es compon de les potències de la relació P i de les seves inverses:

Def. 54.011 Cíclic' $P = \text{Potid}' P \cup \text{Inv}'' \text{Potid}' P$.

Les definicions lògiques primfilades de nombres racionals, reals, complexos, i llurs operacions pertanyen a obres més amples que un tractat ordenat a introduir-se abans que tot en la lògica i secundàriament en les matemàtiques.

PART CINQUENA
VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

En aquesta darrera part tractarem de qüestions bàsiques per a la logística en tant que sistema científic, la qual cosa equivaldrà a fer la filosofia de la logística. Tot amb tot, no ens hi deturarem massa per tal de no ultrapassar els límits modestos d'una introducció.

§ 55

Teoria general de l'axiomàtica

I. AXIOMES-TEOREMES. CONCEPTES PRIMITIUS I DERIVATS. — El mètode axiomàtic consisteix a ordenar segons la dependència lògica les proposicions i els conceptes d'un domini científic especial. Qualsevol recerca axiomàtica suposa, doncs, una ciència preliminar, els elements científics de la qual han d'ésser classificats i disposats en ordre deductiu o de dependència; i ensems cal emprar per a aquesta tasca una altra ciència més general que ens posi a la mà els mitjans i lleis de sistematització. Aquesta ciència és la logística presa en tota la seva amplària. Segons aquest procés, podem axiomatitzar l'aritmètica, la geometria, la física..... emprant la logística.

La tasca axiomatitzadora es disposa de la següent manera:
Considerem:

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

I

Les prop. de la ciència a axiomatitzar pertanyen a dos grups, *A*, *T*.

A) Axiomes: prop. de les quals partirem i que acceptem sense demostració.

T) Totes les altres prop. han d'ésser deduïdes dels axiomes, mitjançant cadenes de deduccions, segons els mètodes lògics, i s'anomenen teoremes.

Per als sistemes dels axiomes cal exigir:

1 a) Els axiomes han d'ésser *suficients* per a poder-ne treure tots els teoremes.

1 b) Els axiomes han d'ésser *compatibles*, això és, no mútuament contradictoris.

1 c) Els axiomes han d'ésser en nombre *minim*, o només els necessaris per a la deducció de tots els teoremes: condició d'*independència mútua*.

Les condicions primera (suficiència) i la segona (compatibilitat) són fonamentals; la tercera (independència) és secundària.

II

Els conceptes de la ciència a sistematitzar són de dues classes:

A) Conceptes primitius, que no definirem, i que són acceptats com a punt de partença.

B) Conceptes derivats, que han d'ésser definits mitjançant els primitius, tot emprant cadenes de definicions segons els mètodes lògics de formació de conceptes.

Per al sistema de conceptes primitius demanarem:

1 a) Els conceptes primitius han d'ésser *suficients* per a definir tots els altres emprats en la ciència considerada.

1 b) Les definicions han d'ésser *compatibles* o no contradictòries mútuament.

1 c) Els conceptes primitius han d'ésser *independents*, això és, cap d'ells no pot ésser definit mitjançant els altres.

II. INTERPRETACIONS D'UN SISTEMA D'AXIOMES. — *Interpretació explícita*. — Els conceptes primitius posseeixen un contingut significatiu intrínsec (intuïtiu, físic, psicològic), i no estan formulats com a pures combinacions de símbols lògics. Aleshores s'anomenen *constants extralògiques*. Els axiomes o teoremes formulen pro-

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

pietats d'aquests conceptes primitius i dels derivats. Aquest cas se'ns presentaria probablement si vollem axiomatitzar la psicologia: els conceptes primitius, v. gr., de consciència, intensitat de les sensacions, qualitat sensitiva, sentiment..... haurien d'ésser presos directament de la intuïció. Anomenarem ciències significatives aquelles els conceptes primitius de les quals solament puguin ésser formulats amb definicions explícites.

Després veurem si totes les ciències admeten una traducció explícita, un model explícitament intel·ligible. La interpretació explícita d'un sistema d'axiomes (*A S*) equival a la subordinació dels axiomes als conceptes, del judici al concepte.

Interpretació implícita. — Els conceptes primitius no posseeixen cap significació intrínseca, independentment dels axiomes: aquests són els elements primaris de la ciència, els conceptes són qualsevol entitat que satisfaci els axiomes. No posseeixen, doncs, sinó una definició implícita. Podem comparar els axiomes a un sistema d'equacions: els valors de les incògnites (els conceptes primitius) són determinats pel sistema total d'equacions lògiques (axiomes). Segons el nombre i la naturalesa dels axiomes, els conceptes primitius restaran definits unívocament (existirà un sol model conceptual), o bé una munió diversa d'objectes els emplenarà igualment. El sistema d'axiomes admetrà aleshores moltes interpretacions conceptuais.

El concepte explícit propi de cada A S. — Si un *A S* té *n* conceptes fonamentals, defineix un sol concepte lògic explícit, característic del sistema d'axiomes en tant que un tot lògic determinat. Aquest concepte propi de cada *A S* és, per a *n* = 1 una classe per a *n* = 2, 3, 4..... una relació bi, triargumental..... Designem com sempre amb *x*, *y*, *z* individus indeterminats, amb *α*, *β*, *γ* classes generals, amb *P*, *Q*, *R*..... relacions. Apleguem ara amb *&* tots els axiomes de l'*A S* considerat: la definició del concepte explícit característic de l'*A S* és:

$$F = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}..... \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}..... \hat{P}, \hat{Q}, \hat{R} \\ \{A S (x, y, z..... \alpha, \beta, \gamma..... P, Q, R.....)\},$$

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

designant $A S (x, y, z, \dots \alpha, \beta, \gamma, \dots P, Q, R, \dots)$ l'expressió lògica formada, unint amb $\&$ tots els axiomes del sistema.

Per exemple: el concepte explícit del sistema axiomàtic de Peano sobre els nombres naturals és el concepte de progressió (Def. 48.01):

$$\text{Prog} = (1 \rightarrow 1) \cap \hat{R} (D' R = \overleftarrow{R}' B' R),$$

concepte suprem que defineix implícitament i determina implícitament les propietats dels tres conceptes fonamentals de Peano, zero, nombre i següent.

Al sistema d'axiomes de la topologia correspon com a concepte total característic (del qual podem deduir tots els teoremes i amb el qual definim implícitament tots els conceptes primitius, permetent-nos, amb tot, de donar-ne una definició explícita) el concepte de *sistemes d'entorns de Hausdorff*.

$$\begin{aligned} \text{Hausdorff} = \hat{R} \{ & D' R \subset [C' D' R] \& (R \subset \varepsilon) \& \\ & (\alpha, \beta) [(\overleftarrow{R}' \alpha \cap \overleftarrow{R}' \beta) \subset s' \overleftarrow{R}'' C' (\alpha \cap \beta)] \\ & \& (\varepsilon \mid D' R \subset \check{R} \mid C) \& (J \mid D' R \subset \check{R} \mid Ex \mid R) \} \end{aligned}$$

La formació d'aquest concepte explícit característic de cada $A S$ permet de tractar com una part de la logística la ciència considerada.

Designem d'ara endavant amb **F** el concepte explícit indicat.

III. PROPIETATS LÒGIQUES D'UN SISTEMA QUALSEVOL D'AXIOMES. — *Models i conseqüències*. — Si **F** (Ω) és satisfeta, això és, dóna una prop. veritable per a Ω_1 , designant Ω_1 un sistema determinat de relacions, classes i individus, direm que Ω_1 és un model de **F** (Ω). Respecte al **F** (Ω) propi de l'axiomàtica de Peano en la seva forma primitiva és un model la sèrie 0, 1, 2, 3, 4, ... amb els tres conceptes explícits, zero, nombre, següent, que pertanyen a les categories lògiques d'individu, classe i relació.

G (Ω) s'anomena conseqüència de **F** (Ω), si **F** (Ω) implica G (Ω) per a tots els valors de les variables, això és, (Ω) [**F** (Ω) $\rightarrow G$ (Ω)] $\sim V$ (escriguem més breument **F** $\rightarrow G$). Si valen **F** $\rightarrow G$ i $G \rightarrow F$, això

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

és, $F \sim G$, F , G són dues formulacions del mateix $A S$. I els teoremes que d'elles es dedueixen són els mateixos.

$F(\Omega)$ s'anomena *ple*, si posseeix almenys un model: en cas contrari, buit.

La unió per $\&$ d'una prop. o funció h amb la seva negació $\bar{h}$ s'anomena contradictòria ($h \& \bar{h}$). I un $A S$ serà contradictori en els seus axiomes si posseeixen una conseqüència contradictòria, és a dir, si amb h també és demostrable $\bar{h}$, tot sortint dels mateixos axiomes. En cas contrari, $A S$ s'anomena *no-contradictori*.

És clar que, si un $A S$ és contradictori, no existeix cap model que el compleixi. La inversa, «si un $A S$ és no-contradictori, posseeix almenys un model» és admesa pels lògics clàssics (Whitehead, Russell, Hilbert, Bernays.....), negada, però, pels intuicionistes (Brouwer, Heyting.....).

Independència. — F , G s'anomenen compatibles si existeix almenys un model per a llur unió per $\&$, $F \& G$: en cas contrari, no compatibles.

G és dependent de F , si G , o si no G , és una conseqüència de F : en cas contrari, són independents.

En un $A S$ es compleixen les condicions d'independència si cada un dels axiomes és independent de la unió copulativa ($\&$) dels altres. Aquesta condició admet les subtilitzacions següents:

a) F , G s'anomenen «independents significacionalment» (Inhaltsfremd) si no tenen conseqüències comunes amb la mateixa significació. I, per tant, que un $A S$ posseeixi aquesta propietat equival a demanar que cada un dels parells d'axiomes la compleixi.

b) F , G s'anomenen totalment independents, si existeixen models per a $F \& G$, $F \& \bar{G}$, $\bar{F} \& G$, $\bar{F} \& \bar{G}$. Per a una independència total dels axiomes d'un sistema determinat demanarem condicions semblants.

De tot això deduïm:

a) Perquè G sigui independent de F , és condició necessària i suficient que F sigui compatible amb G i amb $\bar{G}$; la independència demana més que la compatibilitat.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

b) Si F, G són independents significacionalment, $\bar{F}, \bar{G}$ són incompatibles, car si fossin compatibles existiria un model per a $\bar{F} \& \bar{G}$, la significació del qual seria, sota algun caire, comuna a $\bar{F}, \bar{G}$, i la significació de la negació corresponent seria comuna a F, G .

c) Les condicions d'independència total i d'independència significacional són incompatibles, car entre les condicions d'independència total es troba l'existència d'un model per a $F \& G$.

Isomorfia dels models. — S'anomenen propietats estructurals o estructura d'una relació R , les propietats que pertanyen ensems a totes les relacions isomorfes amb R , si pertanyen a R . I una classe α correspon a una propietat isomorfa estructural si qualsevol relació R isomorfa amb una relació de α pertany també a α .

Podem, doncs, definir l'estructura (Estr) dient:

Def. 55.01 $\text{Estr} = \hat{\alpha} \text{ (smor}'' \alpha \text{ C } \alpha)$. I, per tant,

55.10 $\vdash \alpha \in \text{Estr} = (P, Q) \{ (P \varepsilon \alpha \& P \text{ smor } Q) \rightarrow (Q \varepsilon \alpha) \}$.

Si una relació és estructural, és a dir, si posseeix propietats estructurals, és independent, quant a elles, dels noms o propietats individuals dels elements que hi entrin. Són propietats estructurals de les relacions estudiades, les de Tr, In, Rf, Ref, Irr, Sym, As, $1 \rightarrow \text{Cls}$, $1 \rightarrow 1$, $\text{Cls} \rightarrow 1$, prog, ser, connex, Bord, Ded, densa, closa, Dedek. Existeixen, i n'hem presentat molts exemples, relacions amb moltes d'aquestes propietats ensems: la relació $(+ 1_*)$ és, v. gr., intransitiva, asimètrica, biunívoca, progressió, ben ordenada, connexa. Caldria bastir, doncs, dins la logística un mitjà formal de caracteritzar l'estructura total d'una relació donada (quedant amb això determinada pel mateix fet la de totes les relacions isomorfes amb ella). L'enumeració d'aquestes característiques estructurals no ha estat encara completament feta.

Amb aquests preliminars podem definir la isomorfia dels models corresponents a un mateix sistema d'axiomes.

Un sistema d'axiomes F s'anomena formal si, essent satisfet per un model determinat Ω_1 , és igualment satisfet per tots els models isomorfs amb Ω_1 : en cas contrari, s'anomena material.

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

Els sistemes d'axiomes matemàtics són formals. Un AS pot posseir moltes estructures, si existeixen per a ell diversos models, els quals, si no són isomorfs, només seran models parcials.

Definibilitat. — Aquesta condició d'un sistema d'axiomes pot ésser definida amb tres conceptes: *a)* monomorf; *b)* no bifurcable, i *c)* unívocament decidible.

S'anomena nombre estructural d'un AS el nombre de les estructures (o models diferents) que li pertanyen. F es dirà monomorf si el nombre estructural és 1: en cas contrari, polimorf. Per exemple: l' AS de la geometria euclidiana, proposat per Hilbert, és monomorf. L' AS dels nombres naturals sota la forma de Peano és polimorf. Si li donem, però, la forma de Russell, esdevé monomorf.

L' AS , F , s'anomenarà bifurcable (gabelbar) en la proposició o expressió g , si F és compatible amb g i amb $\bar{g}$, i g és formal. I es dirà, en general, F bifurcable o no segons que entre els axiomes inicials existeixi o no una bifurcació.

El sistema d'axiomes, v. gr., de la geometria general és bifurcable en l'axioma de les paral·leles, car el conjunt de tots els axiomes (amb petites modificacions) és compatible amb l'afirmació o negació del dit postulat.

D'això deduïm: *a) teorema de la bifurcació*, un sistema d'axiomes polimorf és bifurcable: si, però, és monomorf, no serà bifurcable. Car si F és polimorf en g , posseeix dos models almenys no isomorfs, Ω_1 , Ω_2 independents. Ω_1 serà model de $F \& g$ i Ω_2 de $F \& \bar{g}$, I, inversament, si F és bifurcable en g , serà polimorf, car aleshores $F \& g$ és satisfet pel model Ω_1 , i $F \& \bar{g}$ pel Ω_2 , i Ω_1 , Ω_2 no poden pas ésser isomorfs, car aleshores, g essent formal, satisfarien solament g o $\bar{g}$: no pas $\Omega_1 \& g$ i $\Omega_2 \& \bar{g}$. Per tant, F posseeix aleshores dos models no isomorfs: és, doncs, polimorf.

El sistema d'axiomes dels nombres naturals, segons la formulació de Russell, és monomorf: no serà, doncs, bifurcable, i no podem pas esperar, v. gr., una bifurcació de l'aritmètica en els (encara no demostrats) teoremes de Fermat i Goldbach, semblant a la bifurcació de la geometria general en l'axioma de les paral·leles.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

F s'anomena unívocament decidible (entscheidungsdefinit) si **F** posseeix un model i per a qualsevol teorema o afirmació *g*, formada amb les variables de **F**, podem determinar si $\bar{g}$ o *g* és conseqüència de **F**.

Per tant, si un *AS* és unívocament decidible, no és bifurcable: quan el problema del valor universal haurà estat resolt en la logística, aleshores qualsevol *AS* serà ensems unívocament decidible.

Suficiència. — El concepte de suficiència d'un *AS* admet dos sentits. Primer: si d'ell poden ésser deduïdes totes les fórmules vàlides en un domini especial que hem determinat prèviament amb mitjans no formals (amb la significació, en relació amb una ciència especial no formal, v. gr., la psicologia). Segon: en un sentit pròpiament lògic, un *AS* és suficient o complet si, afegint-hi, mitjançant qualsevol de les operacions lògiques, una nova fórmula no deduïble d'ells, resulta sempre una contradicció.

Considerem un exemple de sistema d'axiomes: el de Peano sobre els nombres naturals.

Forma primitiva. — Tres conceptes primitius: nombre (*N*), zero (0) i la relació *següent* (*S*). Els axiomes són:

Ax. I. $\vdash 0 \in N$. El zero és un nombre.

Ax. II. $\vdash (x) [x \in N \rightarrow S'x \in N]$. Per a qualsevol *x*, si *x* és un nombre, el següent de *x* també ho serà; o bé $S''x \in N$. Propietat d'herència.

Ax. III. $\vdash (x, y) \{ (x, y) \in N \ \& \ (S'x = S'y) \rightarrow (x = y) \}$. Si *x*, *y* són nombres i llurs següents són iguals, també ho seran ells, o bé $S \in (Cls \rightarrow 1)$.

Ax. IV. $\vdash (x) \{ x \in N \rightarrow (S'x \neq 0) \}$. O bé, $0 \notin D'S$; és a dir, el zero no segueix cap nombre.

Ax. V. $\vdash (\alpha) \{ N \in \alpha \ \& \ (x) [x \in \alpha \rightarrow S'x \in \alpha] \} \rightarrow (N \subset \alpha)$. O en una altra forma,

$(\alpha) \{ 0 \in \alpha \ \& \ S''\alpha \subset \alpha \rightarrow N \subset \alpha \}$. Axioma de la inducció completa.

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

Forma amb un sol concepte primitiu. — El de la relació, predecessor de (P):

Ax. I a. $\vdash P \varepsilon (1 \rightarrow 1)$. La relació P és biunívoca, la qual cosa equival a Ax. III.

Ax. II a. $\vdash E! B' P$. Existeix un sol membre inicial: el zero; i ara definirem:

Def. I $N = C' P$. Nombres naturals són tots els elements del camp de la relació P .

Ax. III a. $\vdash E! B' P \rightarrow (N = \overleftarrow{P'} B' P)$. Qualsevol nombre natural pot ésser assolit amb una potència de P , tot sortint del $B' P$ del zero; la qual cosa equival a l'Ax. V.

Ax. IV a. $\vdash D' P C D' P$. No existeix terme final.

Forma més senzilla. — La mateixa relació P interpretada com a progressió:

Ax. I b. $\vdash P \varepsilon (1 \rightarrow 1)$. (Ax. I a.)

Ax. II b. $\vdash D' P = \overleftarrow{P'} B' P$. (Ax. II a, III a, IV a.)

En l'obra de Carnap (*Abriss*) es trobaran formulats molts sistemes d'axiomes matemàtics i físics.

§ 56

Tractament formalístic de la logística

El tractament formalístic de qualsevol ciència demana tres estadis preliminars:

1) *Axiomatització extralògica*, i deducció completa del complex o conjunt de proposicions. Prenguem totes les proposicions d'una ciència, i fem-ne dos grups: A , T , no buits; això és, que cada un contingui manta proposició.

A deu arregar un conjunt de prop. que siguin: *a*) no contradictòries o compatibles entre elles (*Widerspruchlosigkeit*).

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

b) independents mútuament. c) suficients per a treure d'elles l'aplec de prop. o teoremes continguts en T (condició d'integritat). Fem un descompartiment semblant amb els conceptes i relacions pròpies de la ciència a formalitzar, formant un grup amb els conceptes i relacions primitives que serveixen per a definir les altres. Amb això termina el primer estadi de formalització. N'és un exemple la formalització de la geometria proposada per Hilbert.

2) *Simbolització abstracta.* — Els axiomes i, per tant, els teoremes, els conceptes i relacions primitives i, per consegüent, les derivades, posseeixen, encara, després de l'axiomatització, una significació extralògica; v. gr., de caire intuïtiu, sensible o psicològic..... En aquest segon estadi hem d'introduir, per als conceptes i relacions originals de les ciències a formalitzar, símbols abstractes, i, amb ells, formular abstractament, sense contingut significatiu, els axiomes o teoremes. Obtindrem com a resultat una xarxa de símbols dins la qual cada prop. serà com un nus caracteritzat, no pas pel seu significat, sinó solament per les relacions de posició deductiva respecte d'altres proposicions. Un teorema simbolitzat d'aquesta manera es distingeix dels altres per les seves coordenades relacionals, és a dir, pel nombre de conseqüències que d'ell es deriven, pel nombre i l'ordre de prop. entre ell i qualsevol altra prop. del sistema. I, sobretot, per la seva distància deductiva dels axiomes. Una imatge apropiada d'aquesta manera de distingir relacionament, sense emprar la significació, seria una carta ferroviària en la qual només apareguessin els trets de la xarxa, conservant únicament el nombre de línies, llurs bifurcacions....., però no pas llur llargària pròpia: amb més tecnicisme, conservar les relacions topològiques i no les mètriques. En aquesta xarxa un nus ferroviari quedaria definit, no pas pel seu nom i condicions físiques, geogràfiques, sinó pel nombre de vies que en surten, amb tantes bifurcacions, etc. Aquesta simbolització abstracta, prescindint del contingut significatiu dels elements emprats, fa perdre als conceptes i relacions llur independència conceptual, significativa; car un concepte prescindint de la seva significació no posseeix cap propietat conceptual absoluta. Els conceptes resten aleshores

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

amb una sola definició implícita, sense explícita. Els axiomes, formulats simbòlicament, els contenen, sense permetre cap més definició que la implícita. «El concepte z , la relació N », són qual-sevol entitat que satisfaci els axiomes. Així, quan l'axiomàtica de Peano es troba al primer estadi, és factible de donar als conceptes primitius «zero», «nombre» i a la relació «següent» una significació extralògica, independentment dels axiomes, els quals tanmateix poden ésser formulats conceptualment. Si passem, però, al període de simbolisme, els símbols de zero, nombre, següent, no diuen res: només ens resten els axiomes com a conjunts especials d'aquests símbols, contenint uns conjunts, tots; d'altres, alguns solament. Aleshores no podem dir res més del zero, per exemple, sinó que és un símbol que intervé en tal i tal axioma, amb tal combinació respecte als altres símbols.

3) *Logicisme*. — El darrer estadi preliminar a la formalització perfecta d'una ciència consisteix en una traducció en simbolisme logístic dels seus axiomes i teoremes. Són possibles dos casos: 1) Tots els axiomes són íntegrament traduïbles amb logística pura, i tots els teoremes són deduïbles amb els procediments deductius de la lògica pura. Aleshores ens trobem amb una reducció o subordinació completa d'aquesta ciència a la lògica. És, segons els logístics, el cas de les matemàtiques. 2) Alguns o tots els axiomes de la ciència considerada no són traduïbles amb els mitjans de la logística. Aleshores cal afegir-los com a axiomes especials al costat dels lògics, i, amb tots, procedir a la construcció efectiva o deducció lògica dels teoremes. Aquest cas se'ns presentaria probablement si volíem formalitzar la psicologia, la biologia, la sociologia.....

Posem-nos ara la qüestió bàsica: Hem formalitzat tota la lògica? La qual cosa es destria en tres qüestions: ¿Hem axiomatitzat la logística complint les tres condicions de compatibilitat, independència i integritat dels axiomes? ¿Hem aconseguit de formular simbòlicament, i mitjançant definicions implícites, sense recórrer a la significació, les lleis i processos tots de la logística? Finalment, ¿pertanyen a la logística tots els mitjans de deducció i axiomes emprats?

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Pel que fa a l'axiomatització de la logística: La lògica prop. ha estat estudiada axiomàticament per Hilbert-Bernays. Segons aquests autors, els quatre axiomes ja indicats, $p \vee p \rightarrow p$, $p \rightarrow p \vee q$, $p \vee q \rightarrow q \vee p$ i $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee s \rightarrow q \vee s)$, compleixen les condicions de compatibilitat, d'independència i integritat. La compatibilitat o no contradicció mútua significa que, aplicant als axiomes les dues regles de deducció i substitució per tal de desenvolupar el càlcul, mai no trobarem com a conseqüències dues fórmules contradictòries mútuament. Hilbert-Bernays ho demostren amb un procediment molt enginyós, traduint aritmèticament les operacions i prenent les prop. com a variables matemàtiques amb dos valors, 0, 1. Aleshores es pot demostrar molt senzillament (encara que el procés és una mica massa llarg perquè puguem exposar-lo ací) que tots els axiomes i fórmules deduïbles donen sempre, com a valor total, zero. La prova posseeix un valor general, malgrat el caire especialitzat del mètode; car, si el complex d'axiomes i teoremes fos internament contradictori, en qualsevol interpretació es palesaria immediatament la contradicció, car una interpretació de la logística és simplement emplenar amb una significació determinada l'estructura esquemàtica dels processos logístics, i un complex de significacions tractades amb un mètode contradictori menarà necessàriament a contradiccions entre els compostos lògics d'aquestes significacions, i contradiccions entre significacions esdevenen més clares, més colpidores per a l'enteniment. La compatibilitat interna del càlcul prop. significa matemàticament: «Mitjançant els processos deductius correctament emprats no arribarem a dues fórmules contradictòries, una de valor total zero, i la mateixa, tractada diferentment, de valor total, 1. Totes, interpretades matemàticament, donen zero. Si ara hi afegim els dos axiomes de la lògica conjuntual $(x) [F(x) \rightarrow F(y)]$ i $F(y) \rightarrow (E x) F(x)$, i suposem que el nombre d'individus inclosos en les funcions prop. emprades és finit, el mateix mètode permet de demostrar que els sis axiomes i llurs conseqüències formen un complex no contradictori, que, interpretat matemàticament, fent una representació conforme, de la logística sobre les matemàtiques (diríem amb una analogia matemàtica) mena sempre al valor total zero; però si suposem que, com demanen moltes teories matemàtiques, el nombre

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

d'individus, d'elements, és infinit, no s'ha pogut demostrar la incompatibilitat interna del sistema total de la logística, format pels sis axiomes, i llurs conseqüències.

Si afegim a aquest sistema purament lògic d'axiomes els d'infinitat i elecció necessaris per tal de treure deductivament les matemàtiques senceres de la logística, la qüestió de la compatibilitat interna d'aquest sistema tan complex està lluny d'ésser resolta. Les antinòmies del concepte d'infinit i de la teoria cantoriana ens indiquen les dificultats immenses de semblant tasca.

Una reflexió filosòfica se'ns imposa en aquest punt: el mètode de Hilbert ¿demostra perfectament la compatibilitat interna de la logística reduint i tot les nostres investigacions a un nombre finit d'individus?

Creiem que no.

Hauríem de demostrar per endavant que no són possibles més regles de construcció de teoremes que les dues de deducció i substitució. Car podria esdevenir-se molt bé que els mateixos axiomes tractats amb regles noves menessin a teoremes contradictoris als deduïts emprant solament les dues regles dites: com partint d'una mateixa via en una estació (sortint dels mateixos axiomes), si aquesta es descomparteix després en dues paral·leles (les dues lleis de deducció) els xocs són impossibles; però seria possible una tercera via (una nova regla de deducció) que d'un punt endavant travessés manta vegada les dues vies anteriors. Aleshores un xoc és possible, una contradicció que abans no podia esclatar, mancant les condicions degudes. Doncs bé: no ha estat demostrat que les dues regles de deducció siguin les úniques possibles. Al contrari, segons els treballs de Weiss, hi ha encara tretze noves regles de deducció; segons Kempe, una relació asimètrica transitiva correspon al tipus general de deducció; car l'asimetria imposa un ordre especial entre els tres elements que, com a mínim, han d'intervenir en una R. T. i la transitivitat fa possible la deducció, o pas, a través d'un terme intermedi. Si a, b, c són elements d'aquesta relació As. Tr, val $(a R b) \& (b R c) \rightarrow (a R c)$; que és un tipus molt més general de deducció que el format amb la funció *implicació*: $[(a \rightarrow b) \& (b \rightarrow c)] \rightarrow (a \rightarrow c)$; car $\rightarrow$ no és una relació ni simètrica ni asimètrica, encara que posseeixi la pro-

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

pietat de transitivitat; puix que poden ésser veritables les implicacions $(a \rightarrow b)$, $(b \rightarrow c)$, i $(b \rightarrow a)$ i $(c \rightarrow b)$, i, per tant, hi haurà casos en què no sabrem si $(a \rightarrow c)$ o $(c \rightarrow a)$; això és, la funció deducció, mitjançant la implicació, no determina pas una *direcció immutable* d'ordre entre les prop., que permeti de fixar una d'elles com a principi primer, una altra com a mitjà, la tercera com a conclusió. En canvi, emprant com a regla de deducció una R. As. Tr, tenim que si val $(a R b)$, si val $(b R c)$, no val $(b R a)$ ni $(c R b)$. D'això deduïm que en el càlcul proposicional i conjuntual no existeixen regles perfectes de deducció que ordenin d'una manera fixa, sempre en direcció de principis a conseqüències, les proposicions o teoremes.

El procés de Hilbert és imperfecte. Considerem, en efecte els sis axiomes indicats i les dues regles de construcció de conseqüències. Integrem lògicament, això és, universalitzem les funcions prop. de dues o més variables, $f(x, y)$, $F(x, y, z)$ Transformen-les en prop. V , o F ; $(x)(y) f(x, y)$; $(x)(y)(z) F(x, y, z)$, considerant, naturalment, funcions prop. el nombre d'elements de les quals sigui finit. V. gr.: « x gira entorn de y ». Ací suposem x, y referides als cossos reals, x, y comprenen un nombre finit. Amb això ens trobem al domini de les *relacions*. Ara bé: les relacions uneixen sempre dos o més elements i els mateixos elements poden ésser *simultàniament* sotmesos a relacions contradictòries, v. gr., a una R. Sym. Tr. i a una R. As. Tr. a una As. In, v. gr. (2, 4), a la R. As. Tr. de $<$, i a la As. In. de «meitat de» i a la Sym de « x no és primer amb y ». En fer, doncs, la integració lògica, respecte a una *relació especial*, $(x)(y) f(x, y)$, hauríem de demostrar que les altres relacions existents entre els x, y considerats, mai no menaran a contradiccions dins el sistema total de relacions que uneixen x, y amb tots els altres elements lògics. Car notem que la integració lògica o universalització comprèn, segons les funcions, més o menys elements. V. gr.: dins un domini finit la relació $<$ és més rica que no pas la de «doble que». Per consegüent, la universalització respecte a una funció no ho és respecte a d'altres que afecten totes ensems un determinat nombre d'elements comuns. Però això no ha estat demostrat ni tractat, i sembla que s'ho val.

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

La segona condició demanada a un sistema perfecte d'axiomes és la d'independència entre ells; la qual cosa equival que cap d'elles no pugui ésser deduït dels altres, emprant les regles de deducció. Hilbert-Bernays han demostrat que els axiomes de la lògica prop. emplenen aquesta condició: podem trobar interpretacions matemàtiques diverses que menen a un valor igual per a un conjunt d'axiomes, prenent la resta un valor diferent: no pas el contradictori del primer, naturalment; car en aquest cas, semblants axiomes serien incompatibles o mútuament contradictoris.

La independència lògica dels sis axiomes de la lògica prop. i conjuntual no ha estat estudiada fins ara, la qual cosa no és pas cap defecte essencial, car la dependència no té cap més efecte lògic que catalogar, entre els teoremes, prop. que semblaven axiomes.

La tercera condició d'*integritat* és molt important. La integritat d'un sistema d'axiomes pot ésser definida de dues maneres: *a)* que d'ells poden ésser deduïdes totes les fórmules d'un camp especial; *b)* la segona accepció és més significativa: un sistema d'axiomes és íntegre quan l'addició d'una nova fórmula no deduïble dels axiomes al conjunt d'axiomes i fórmules inicials mena a una contradicció. Ambdues integritats posseeix el càlcul proposicional, segons Bernays-Hilbert. S'ha demostrat, però, que el sistema dels sis axiomes no posseeix la qualitat d'integritat.

Un dels mètodes lògistics més interessants és, sens dubte, el de la forma normal conjuntiva que permet de conèixer, entre les innombrables expressions lògiques, les lleis lògiques o expressions sempre *V* per llur mateixa constitució, per la disposició de les operacions lògiques que relliguen les prop. siguin aquestes *V* o *F*. La *F. N.* disjuntiva ens descobreix les expressions sempre falses i ambdós mètodes permeten, per consegüent, de conèixer les expressions lògiques que no són ni sempre *V* ni sempre *F*, sinó que en casos especials posseeixen el valor de *V*. En aquest cas direm que el problema lògic, traduït en l'expressió corresponent, admet *solució*. S'ha estudiat si, en la lògica total, composta de proposicional i conjuntual (i, per tant, de la relacional inclusivament), podríem trobar mitjans semblants per a decidir calculatòriament si té solució un problema lògic en el qual intervinguin prop. ordinàries,

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

universals, particulars, singulars, que menin a classes, relacions, una vegada formulat amb simbolisme lògic, això és, si existeix un individu o conjunt d'individus que facin veritable l'expressió total (§ 24).

I per tal com, amb la lògica prop., conjuntual i relacional, podem (afegint-hi els dos axiomes pròpiament matemàtics) deduir les matemàtiques senceres, si posefem aquest criteri podríem demostrar *a priori* per a cada problema si té solució o no. Malauradament, la logística total no ha trobat encara el mètode convenient. Situació que s'agreuja tant més que Brouwer i els neointuicionistes declaren que aquesta pretensió és irrealitzable respecte a les matemàtiques. D'això parlarem immediatament. No caldrà ponderar els avantatges immensos de l'axiomatització d'una ciència fins on sigui possible: amb ella la ciència pren consciència del nombre dels seus axiomes, dels seus mètodes deductius, d'on es troben els problemes i quins altres queden automàticament resolts amb els primers. L'axiomatització de la geometria per Hilbert i la de l'aritmètica ha estat profitosíssima per a ambdues ciències.

Amb tot, reafirmant per lleialtat la necessitat i els fruits de l'axiomatització de qualsevol ciència, assenyalarem els problemes no aclarits encara en el mètode axiomàtic. Hem vist que el sistema dels sis axiomes de la logística no posseeix la propietat d'integritat; aleshores, com es demostrà en l'axiomàtica general, el sistema admet moltes interpretacions, molts models diferents, moltes teories i objectes que compleixen els axiomes, com un edifici a mig fer admet moltes terminacions diferents i independents; i, amb una comparació més exacta: un sistema d'axiomes sense la condició d'integritat és com un sistema d'equacions en el qual el nombre de les variables o incògnites és més gran que el de les equacions. Les solucions, aleshores, són moltíssimes i, fins a un cert punt, independents. Doncs bé: un sistema d'axiomes no íntegre és un complex de judicis més petit en nombre que els conceptes a determinar per ells. Per tant, són possibles diversos sistemes d'objectes, diverses teories que compleixen els axiomes, sense que puguem determinar quina teoria, quin sistema d'objectes o model és l'adequat a l'edifici científic total, ideal. Aleshores

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

aquest sistema no íntegre és una funció proposicional amb molts arguments possibles, amb molts models; i una funció proposicional no és ni veritable ni falsa, com « x és home». Solament s'esdevé F o V segons l'argument que donen a la variable. I si el sistema inicial d'axiomes no és ni V ni F en ell mateix, les conclusions, els teoremes, tampoc no gaudiran d'aquesta propietat. L'únic mitjà de sortir de semblant dificultat és considerar sempre un model especial; la qual cosa ens priva, aleshores, dels avantatges del mètode universalista propi de l'axiomàtica. Ens trobem per ara, en l'axiomàtica lògica general, en un estat semblant al de l'axiomàtica de Peano sobre els nombres naturals. Els cinc axiomes es compleixen amb models ben diferents, entre altres:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, 1, 2, 3, 4..... \\ 100, 101, 102..... \\ 0, 2, 4, 6, 8..... \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}..... \end{array} \right.$$

Russell ha aconseguit fer el sistema d'axiomes dels nombres naturals monomorf, això és, determinant d'un sol sistema d'objectes, d'un sol model. Un sistema geomètric monomorf és el sistema dels axiomes propis de la geometria euclidiana proposat per Hilbert.

De quin mitjà ens servirem, doncs, per a afegir el nombre d'axiomes necessari i suficient per tal de transformar en proposicions veritables les funcions proposicionals axiomàtiques, de manera que el sistema d'equacions lògiques, de judicis, determinin un sol complex, un sol model possible d'objectes? Els camins semblen ésser reduir el nombre d'equivalències inicials i admetre, en conseqüència, més conceptes primitius independents, o bé cercar alguna operació lògica nova que ens permeti de resoldre unívocament les equacions lògiques axiomàtiques, com la troballa de l'operació «pas al límit» ha permès de resoldre una infinitat de problemes insolubles amb les matemàtiques elementals.

La lògica prop. que hem desenrotllat només admetia *una operació i concepte primitiu*, el d'*incompatibilitat*, i amb ell definíem

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

tots els altres, tan diferents quant a llurs significacions, $\bar{p} = (p \mid p)$, $p \vee q = (p \mid p) \mid (q \mid q)$, $p \& q = (p \mid q) \mid (p \mid q)$, $(p \rightarrow q) = p \mid (q \mid q)$.

En canvi, els neointuicionistes admeten quatre conceptes i operacions independents ($a \rightarrow b$), ($a \& b$), ($a \vee b$), $\bar{a}$, i, naturalment, això augmenta el nombre d'axiomes del càlcul prop. a onze independents entre ells, amb la particularitat notable (de la qual parlarem més endavant) que amb ells es pot demostrar el principi d'identitat i ensems provar que el principi «tertium non datur» o l'exclusió de mitjà entre afirmació i negació és independent dels axiomes i del principi d'identitat; de manera que podem negar la prop. d'exclusió de mitjà sense incórrer en contradicció, contra el que defensava la lògica aristotèlica. Un camp immens i transcendent de recerques ens resta encara per explotar: els problemes a resoldre són, sens dubte, cabdals, i llur solució menarà a un estadi definitiu de la logística. Amb aquestes indicacions hem respost a les dues qüestions preliminars sobre el simbolisme abstracte i el logicisme. Si el nombre d'axiomes, d'equacions lògiques, no és suficient per a definir implícitament tots els elements lògics, és clar que haurem de recórrer a la significació extralògica en molts casos. La logística de *Principia mathematica*, que no ha estat bastida amb el mètode axiomàtic rígid, com la de l'escola de Gotinga, empra moltes vegades el sentit conceptual. Aquesta tendència es nota en el nombre crescut de definicions explícites emprades en el sistema clàssic de *Principia mathematica*. Encara més: el mateix Hilbert introdueix explícitament dos axiomes justificables només amb el significat (inhaltliche Axiome); són les dues regles de deducció i substitució. És a dir, el pla d'una definició implícita (i, per tant, d'un simbolisme abstracte perfecte, d'una fixació purament relacional dels conceptes primitius) encara no ha estat assolit per ningú. El programa primitiu de la logística, «no emprar la significació», esdevé irrealitzable. La logística no és un cos de doctrina completament tancat, no constitueix objectes en el sentit propi de la paraula, si no que hem de dir, amb Bruno Bauch, que és un estadi en evolució mental vers la constitució de l'objecte únic i final de l'activitat categorial humana.

§ 57

Lògiques no-aristotèliques

En una nova direcció es pot eixamplar la logística, que anomenarem clàssica (la de *Principia mathematica* i la de l'escola de Gotinga). En ella una prop. només pot posseir dos valors V , F . ¿No serà possible, però, bastir una lògica més àmplia en la qual les prop. tinguin més valors i de la qual surti com un cas especial la lògica ordinària amb dos valors? Moltes provatures han estat fetes per tal d'assolir aquest grau de generalitat per Lukasiewicz, Post, Tarski, Dubislaw..... Ara només parlarem breument de dues que semblen més racionals i que permeten una interpretació intel·ligible dels valors intermedis entre V , F : la lògica intuicionista de Brouwer i Heyting i la lògica de la probabilitat. Ambdues enfoquen la qüestió sota punts de mira aparentment divergents, però força alligonadors.

I) *La lògica intuicionista*: obra de Brouwer y Heyting. La lògica intuicionista és d'origen matemàtic. Deixant de banda aquest aspecte, considerem l'abast lògic de l'intuicionisme. L'intuicionisme afirma que «la lògica ordinària i la seva prolongació sistematitzada, la logística clàssica, no val per als objectes que no existeixen sinó produïts per l'enteniment, com ho són totes les entitats matemàtiques». Suposa, doncs, que els éssers matemàtics, sobretot les diverses classes de nombres, no tenen cap existència transcendent, a la faísó platònica, ni solament l'existència ideal pròpia de les unitats de significació husserliana. Són productes de l'enteniment, i només existeixen si han estat produïts i en el mateix grau en què ho han estat. Així, si la construcció efectiva del nombre π ha estat interrompuda al lloc n després de $3'$, no té cap sentit posar la disjunció «Al lloc $n + 3$ hi ha un nombre parell o imparell», que un lògic ordinari consideraria vàlida; car suposa que els nombres existeixen *perfectament fets*, independentment de la construcció mental humana. Aleshores en aquesta

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

hipòtesi té sentit afirmar que el nombre π en ell mateix, al lloc $n + 3$ després de 3' posseeix un nombre parell o no. Però si els éssers matemàtics són d'origen constructiu mental i, per hipòtesi, la construcció no ha estat feta, el dilema del *tertium non datur* no és aplicable; com respecte a una casa feta podem posar el dilema «o és blanca o no», però si res no sabem de la seva construcció, el dilema esdevé sense sentit, car ens manca una condició preliminar per a poder aplicar la disjunció, i és «que la casa sigui real», «que hagi estat bastida». Així, la condició preliminar per a «aplicar el *tertium non datur*» als éssers matemàtics és que existeixin, i no existeixen sinó per construcció mental; per consegüent, si no sabem res de la construcció efectiva, o sabem que no ha estat feta, el *tertium non datur* no és aplicable. I notem les conseqüències lògiques d'aquesta afirmació: hi ha objectes per als quals el principi d'exclusió de mitjà no s'aplica, perquè el predicat disjuntiu és totalment inconnex amb el subjecte. El dilema «El nombre 7 és un nombre malastruc o no» és un dilema inexistent, car ambdues propietats, nombre i malastruc, són totalment inconnexes: les dues prop. contradictòries «El 7 és malastruc» i «El 7 no és malastruc» no tenen cap significació.

El cas dels éssers matemàtics és molt diferent, car, tan aviat com hauran estat construïts, els serà aplicat perfectament el principi d'exclusió de mitjà. «El nombre π té al lloc tercer després de 3' un nombre parell o no» és una disjunció perfecta, plena de sentit. L'afirmació intuicionista sosté que abans de la construcció no té sentit l'aplicació. Aquesta anticipació, predeterminació que la lògica clàssica fa de l'aplicació del principi d'exclusió de mitjà abans que l'objecte existeixi (amb existència mental, naturalment), és rebutjada pels intuicionistes com un postulat sense sentit. Consegüentment, no admeten:

1) Que la fórmula $p \bar{p}$ del càlcul prop. sigui sempre V perquè la lògica proposicional clàssica l'afirma per a qualsevol prop. Si les prop., però, designen objectes existents (no caldrà que hi afegim més l'aclariment, existència mental, ideal almenys), la fórmula serà vàlida; però si les prop. emprades pretenen copsar objectes d'essència constructiva mental i determinar disjuntivament una propietat llur, la fórmula és invàlida. Haver de triar entre prop.

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

i prop. per a poder afirmar $p \bar{p}$ com a V , indica que $p \bar{p}$ no és un principi universal.

2) En la lògica clàssica i càlcul conjuntual valia la llei $(\bar{x}) F(x) \sim (E x) \bar{F}(x)$, això és, afirmar que la prop. $(x) F(x)$ no val per a tots els x , equival a afirmar que *existeix* un element que no la compleix. De nou els intuicionistes rebutgen aquesta llei, car una afirmació purament existencial no té sentit en tractar-se de prop. significadores d'objectes que no existeixen si no construïts. Així, la disjunció « $a + b = b + a$ val per a tots a, b », o bé, «existeix un cas, un parell de valors α, β tals que $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$ » no val, segons els intuicionistes; car aquesta afirmació, purament existencial, no ens dóna cap criteri per a construir efectivament α, β ; i, com que els nombres no són éssers subsistents en ells mateixos, sinó productes intel·lectuals, afirmar llur existència sense una construcció preliminar és una afirmació sense sentit. Per tant, el càlcul conjuntual demana reforma, i, en efecte, un de nou ha estat bastit per Heyting.

3) No es deturen amb això les conseqüències filosòfiques de l'intuicionisme: les lògiques transcendents que admeten la funció objectal de l'enteniment han d'acceptar la crítica de Brouwer i negar la validitat universal del principi *tertium non datur*. En efecte: si els objectes són produïts per l'enteniment, cal tractar-los com les entitats matemàtiques. L'aplicació, doncs, del *tertium non datur* suposa com a condició preliminar llur construcció efectiva. Conseqüentment, cap lògica transcendental, segons els intuicionistes, no mena directament a la logística bivalent clàssica. Per això consideren Kant com un precursor de l'intuicionisme matemàtic.

La lògica intuicionista, admetent un nombre major d'idees primitives, pot ésser una continuació més natural de les funcions categorials de l'enteniment que no pas la logística clàssica amb un sol concepte primitiu i irreductible.

II) Notem ara una idea que ens atansarà al sistema lògic fonamentat en el càlcul de les probabilitats. Hem indicat que, un cop feta la construcció d'una entitat matemàtica, els dilemes sobre les seves propietats tenen un sentit perfecte. Si el número π ha estat calculat fins al lloc 220 després de 3', difícilment podríem

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

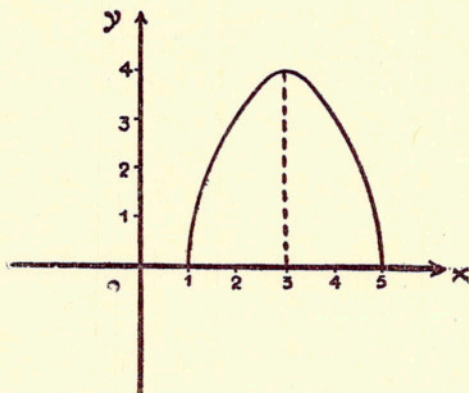
dir ara quina xifra hi ha al lloc 223. El dilema «Tal nombre és parell o no» no té sentit ple: és una disjunció que no podem usar vàlidament com a mitjà de demostració. Doncs suposem que estem fent la construcció efectiva del nombre corresponent al lloc 1111 després de 3'..... Ens hi atansem contínuament; per consegüent, el dilema que no tenia sentit quan la construcció restava transitòriament finida, ara que l'anem avançant, no en té encara, però *es va fent el sentit* d'aquesta disjunció, i no podem tractar aquest estadi de *construcció en esdevinença* de la mateixa manera que una construcció aturada; per tant, la disjunció V, F és massa simplista: no ens reflecteix les condicions d'un sentit, d'una significació que es fa. Cal substituir-la, per a aquests casos, amb un procés lògic que ens permeti d'avaluar els matisos entre V, F estudiant veritats o falsedats en estat d'esdevinença, com era estudiada en la metafísica antiga l'esdevinença dels éssers reals, el moviment successiu com un terme mitjà entre l'ésser i el no-res. La metafísica aristotèlico-tomista admet termes intermedis entre el no-res i l'ésser complet o existent, això és, a saber, les potències reals, matèria primera i essència. La metafísica tomista, sobretot, podem dir que és trivalent (no-res, potència, existència); en canvi, la seva lògica és bivalent (veritat, falsedat). Provem, doncs, d'eixamplar la lògica clàssica i la logística en aquesta direcció: «Entre veritat perfecta i falsedat hi ha estadis d'evolució, de tendència envers aquests extrems.»

Considerem un exemple matemàtic i un altre correlatiu de lògica que ens estalviaran consideracions massa generals i complicades del càlcul probabilístic.

La funció $y = (x - 1)(5 - x)$ per a

$$x = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{dóna} \quad y = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ això és, gràficament:}$$

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA



Seria un simplisme matemàtic si tractàvem aquesta funció amb el dilema, d'altra banda lògicament legítim, «Per a qualsevol valor de x , y és zero o no». Car amb això tots els valors de y són tractats igualment sense valorar màxim ni mínim. Si quan $y = 0$, escrivim F , quan $y \neq 0$, escrivim V , tindrem com a esquema total:

$$y = \begin{cases} F \\ V \\ V \\ V \\ F \end{cases}$$

un esquema molt simplificat: matemàticament una pura inutilitat; encara que el dilema lògic i el corresponent esquema amb V , F siguin certament un model de correcció. Si amb aquest mètode tractàvem les matemàtiques senceres, només obtindríem les matemàtiques possibles amb els dos valors 0, 1: restringidíssimes i gairebé primitives. Doncs, notem-ho bé, el mateix simplisme (legítim, repetim) comet la lògica clàssica tractant totes les proposicions amb el dilema V , F . En efecte, considerem la sèrie de proposicions:

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

		Esquema clàssic total
$\{a)$	L'espanyol a és blanc.	V
$b)$	Tots els espanyols són blancs.	V
$c)$	Tots els espanyols i europeus són blancs. . .	V
$d)$	Tots els europeus i alarbs..... són blancs . . .	V
$\mu)$		V
$\delta)$	Tots els europeus i africans són blancs . . .	F
$\gamma)$	Tots els i asiàtics són blancs.	F
$\beta)$		F
$\alpha)$	Tots els homes són blancs	F

La lògica clàssica tracta totes aquestes prop. amb el dilema veritable i simplista «cada prop. és o veritable o falsa», i, per tant, l'esquema total serà: $V V V V..... V..... F F F F$. L'analogia amb el tractament simplista de la funció matemàtica considerada és remarcable i alligadora.

Estem en el nostre dret tractant amb la disjunció V, F , aquest complex de prop. No cometem cap error lògic, però de vegades el pitjor error és el simplisme, car amb la seva claredat aparent ens desorienta i destorba de veure els caires més pregonos i fructífers de la qüestió. I aquests procediments sumaris i simplistes s'arrelen tan aferrissadament a la intel·ligència, que esdevenen les rèmores més terribles del progrés.

Tornem a la nostra tasca i posem-nos la qüestió de si és possible valorar graus dins la veritat i la falsedat: trobar màxim i mínim semblants als matemàtics. Això s'aconsegueix introduint a la lògica el concepte de *frequència*, emprat en el càlcul de probabilitats, que, amb tot, simplifiquem ací per no allargar massa aquesta obra. Entre les prop. d, δ hi ha una prop. μ a la qual podem donar la forma $\mu = \text{«Tots els europeus, tots els alarbs..... són tots els blancs.»}$ Si designem amb una fracció, en el denominador el nombre total de blancs m , i en el numerador el nombre total d'individus que conté la classe o classes determinades pel subjecte de la prop., la prop. μ tindrà el valor $1 : \frac{m}{m} = 1 = \mu$. Anomenem μ prop. de veritat màxima. Comparades amb ella,

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

les prop. $a, b, c, d, \dots$ són certament veritables, però amb una veritat menor; ço que declaren les fraccions corresponents $\frac{m^I}{m}, \frac{m^{II}}{m}, \frac{m^{III}}{m}, \frac{m^{IV}}{m}, \frac{m^V}{m}$, on m^I designa el nombre total d'individus blancs determinats pel subjecte de la seva prop. a , etc.; i val $m^I < m^{II} < m^{III} < m^{IV} \dots$. I un ordre semblant de F podríem posar entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$.

La falsedat màxima (màxima negativa, si val l'expressió) correspon a α ; la falsedat relativa minva de $\alpha, \dots$ a δ . Un càlcul lògic que permeti d'avaluar aquests matisos de V, F menarà a una lògica molt més àmplia que l'ordinària, de la mateixa manera que la matemàtica actual, permetent a les variables independents un camp extens de variabilitat, és més àmplia que no pas unes matemàtiques amb els valors 0, 1 per a les variables. Tals matemàtiques, bastides amb la disjunció «Tot valor és zero o no», corresponen punt per punt a la lògica, que davant qualsevol prop. només posa la qüestió «és V , o F ». Ambdues ciències així bastides serien d'un magnífic simplisme. Les matemàtiques ja fa temps que s'han alliberat d'ell; la lògica clàssica, per contra, sembla haver fet un vot poc recomanable de pobresa intel·lectual. Se'ns obre, doncs, un nou camp de recerques interessants i transcendents.

§ 58

Les antinòmies lògiques i llur solució

Ramsey ha mostrat que es podien destriar en dos grups independents: 1) antinòmies lògiques, 2) antinòmies epistemològiques. Les primeres aparegueren en la teoria cantoriana dels conjunts, sobretot dels nombres transfinitos. Estudiem una mica la més senzilla i ensem la més alligonadora, la de Russell-Zermelo. El judici disjuntiu «Un conjunt M , o bé s'inclou ell mateix com a element o no» és, quant al seu valor lògic, independent de qualsevol de les dues hipòtesis: la disjunció és perfectament vàlida.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Un exemple de conjunt M que s'inclou ell mateix com a element és el «conjunt de tots els conjunts abstractes», car aquest mateix conjunt total és un concepte abstracte; en canvi, «el conjunt de llibres d'una biblioteca» no és pas un conjunt que s'inclogui ell mateix com a element d'igual ordre que els llibres. Anomenem, doncs, A , un conjunt que no s'inclogui ell mateix com a element, i formen el conjunt M , els elements del qual siguin tots els conjunts del tipus A . Preguntem-nos: M s'inclou ell mateix com a element? Si responem que *no*, és a dir, « M no s'inclou ell mateix com a element», pel mateix fet entra en la categoria A ; i, per tant, « M s'inclou ell mateix com a element», això és, de la *negació es segueix l'afirmació de la negació*. Si responem, però, que *sí*, és a dir, « M s'inclou ell mateix com a element», se'n dedueix que M no s'inclou ell mateix com a element, car M no inclou, segons la seva definició, sinó conjunts del tipus A . Per tant, de l'afirmació es segueix la negació de l'afirmació. Tenim, doncs, que el concepte de M és contradictori, car sabem per la lògica proposicional que de $(\bar{p} \rightarrow p)$ i $(p \rightarrow \bar{p})$ es dedueix $p \sim \bar{p}$: l'afirmació equivalent amb la negació. Notem ara els conceptes i mitjans lògics amb els quals hem format el concepte de M , i veurem que són els més senzills i elementals de la lògica i teoria dels conjunts. I, ¿com és possible una tal contradicció en els elements bàsics d'ambdues ciències? Una contradicció semblant es troba en el concepte d'impredicable. Una propietat s'anomena impredicable quan no pot ésser aplicada amb sentit a ella mateixa. V. gr.: al concepte de *concret* no li escau l'adjectiu «concret», car com a concepte entra en la categoria dels abstractes. Doncs bé: el concepte d'impredicable, pres en tota la seva amplària, és contradictori, car si suposem que és impredicable val la prop. «Impredicable és impredicable», i, per tant, «impredicable és predicable» (o sigui d'ell mateix). Si admetem, però, que «impredicable és predicable» se'n dedueix que «impredicable no és impredicable». El concepte d'impredicable admet, doncs, dues propietats contradictòries: és, per consegüent, un predicat contradictori. I, amb tot, és un concepte primari de la lògica.

Totes aquestes antinòmies i altres de semblants resten eliminades amb la teoria bàsica dels tipus lògics de la qual varem parlar en

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

la lògica conjuntual, car, segons la regla corresponent, una funció prop. no admet altres valors que els de tipus immediatament inferior. Ella mateixa no pot pas servir d'argument; en les antinòmies adduïdes, però, empràvem com a argument la mateixa funció. En la funció proposicional « x és impredicable», en lloc de x posàvem la mateixa funció «impredicable» contra la regla; d'on, la contradicció, millor dit, la manca total de sentit. Un valor escaient per a x seria, v. gr., «concret». Si $I(x)$ simbolitza la funció dita, al símbol $I(I)$, ($x = I$), no correspon cap sentit lògic. Semblantment, si $M(x)$ significa « x és el conjunt que no s'inclou ell mateix com a element», $M(M)$ no té cap significació lògica.

Les antinòmies semàntiques o epistemològiques formen un grup lògicament destriat del precedent. Un exemple d'aquesta mena de contradiccions és el concepte «heterològic»: un nom s'anomena autològic quan posseeix ell mateix la propietat significada, v. gr., «trissíl·lab», que és trissíl·lab; heterològic, quan no té la propietat significada, v. gr., «monosíl·lab», que és tetrasíl·lab. Si ara preguntem a quina categoria pertany el nom heterològic, ens trobarem en contradiccions semblants a les indicades. Un altre exemple és l'antinòmia ja coneguda en matemàtiques en la descripció dels nombres. Qualsevol nombre natural pot ésser expressat en català, sigui pel seu nom cardinal corresponent, sigui pel nombre ordinal propi, o bé per qualsevol altra descripció, v. gr., «el nombre primer i parell» (això és, el dos); o el nombre màxim que pot ésser escrit amb tres xifres (999), etc. Limitem-nos a descripcions que no continguin més de cent lletres. Immediatament es veu que el nombre de nombres que podem descriure d'aquesta manera és finit; per consegüent, existeixen nombres naturals no descriptibles amb cent lletres com a màxim, i entre ells n'hi ha un de mínim; però «el nombre mínim natural no descriptible amb cent lletres com a màxim» resta definit amb menys de cent lletres. Comptem les emprades: no arriben a cent, i amb elles el nombre queda unívocament descrit.

Ens trobem que el concepte «descripció», tan fonamental en matemàtiques i en logística, esdevé fàcilment contradictori. Aquesta mena d'antinòmies, com demostrà Ramsey, no poden ésser for-

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

mulades quan en lloc dels mitjans de descripció gramatical ordinària fem el simbolisme més primari de la lògica. Per consegüent, no ens hi hem d'encaparrar. Provenen de la imperfecció del llenguatge ordinari, i, per tant, la teoria dels subtipus lògics, creat per Russell per tal d'evitar aquestes antinòmies, esdevé sobrer i inútil: les dificultats d'acoblament entre lògica i matemàtiques s'esvaeixen completament en aquest punt.

Russell, però, havia establert un principi, ja defensat per Poincaré, necessari al seu parer per tal d'evitar les antinòmies, «la prohibició de formacions no-predicatives de conceptes». Una definició o formació de conceptes s'anomena no-predicativa quan defineix un concepte per relació a un conjunt, del qual és un element. Aquesta definició equival, evidentment, a un cercle viciós: és definir un concepte per ell mateix a través d'un conjunt en el qual es troba implícit. Aquesta definició no té cap sentit lògic acceptable. I, amb tot, la lògica i les matemàtiques semblen servir-se freqüentment d'aquesta mena de definicions. Parlem de «l'home més ric d'una ciutat», de «l'home més alt d'una reunió», del «nombre més gran dins un conjunt finit», etc., sense que sapiguem la riquesa absoluta, l'alçària, el valor absolut dels objectes alludits, i, amb tot, estem convençuts que aquestes descripcions són legítimes i unívokes, malgrat que en elles definim un objecte per relació amb un conjunt dins el qual està inclòs.

Ramsey defensà la tesi que aquestes definicions són inofensives, amb les condicions següents: a) que l'objecte no sigui creat per aquesta descripció sinó que existeixi independentment d'ella; b) que posseeixi, ultra les propietats derivades solament de les seves relacions amb el conjunt, altres propietats absolutes i pròpies. Aleshores la definició no-predicativa és solament un mitjà per a suplir la nostra deficiència en el coneixement de les propietats absolutes de l'objecte definit.

§ 59

Col·locació de la logística dins el sistema lògic total

I. LES TRES FUNCIONS DEL JUDICI: SINTÈTICA, CATEGORIAL I OBJECTAL. — Colloquem-nos de bell antuvi en l'acte intel·lectual per excel·lència, el judici, i considerem-lo sota els tres caires més importants per a la constitució de les *ciències*: a) el judici com a formador dels conceptes; b) el judici en tant que revelador de l'estructura interna de l'enteniment, això és, com a acte manifestatiu de les categories en sentit kantià; c) el judici en tant que formador, creador dels objectes i llurs ordres.

Ens orientem, doncs, de bon començ vers les *ciències* i les condicions de llur possibilitat, car en elles es palesa, com enlloc, l'estructura pregonada de l'enteniment i l'abast dels seus recursos interns. Més tard eixamplarem aquest punt inicial de partença considerant les creacions culturals de l'enteniment humà, sempre però des d'un punt de mira elemental i introductori.

a) El judici és el formador, el matriador dels conceptes *científics*. Els conceptes vulgars, per exemple, de dependència, volum, curvatura, força, velocitat..... no serveixen per a les ciències matemàtiques i físiques. Llurs conceptes correlatius científics de funció, integral triple, curvatura definida pel tensor de Riemann Christoffel, força definida com a funció de les coordenades, velocitat definida com a derivada primera de l'espai segons el temps..... condensen totes elles un enfilall de judicis que han refinat els conceptes vulgars fins a adaptar-los a les necessitats de la ciència. En aquest estadi definitiu hem d'estudiar l'essència i virtualitat plena del judici, com esperem que una planta es desenvolupi completament per a determinar les seves característiques: sense, però, deixar de banda l'estudi de l'evolució mateixa i el desenrotllament dels conceptes, l'evolució ontogènica i filogènica dels conceptes científics, tan alligadora com ho són per a la història natural les consideracions corresponents. Anomenem aquesta primera funció

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

del judici *funció sintètica*, car amb ella aplega en una unitat significativa total (el subjecte) un conjunt de notes (predicats) amb un ordre intrínsec entre ells.

b) El judici revela l'estructura interna de l'enteniment. Aquest aspecte fou portat a plena llum per Kant. La lògica transcendental estudia les categories, les formes *a priori*, segons les quals l'enteniment elabora i dona significació intel·ligible per a nosaltres a la realitat transcendent, al «Ding an sich». El que anomenem «sentit», «contingut significatiu», «claredat interna d'un judici», d'una explicació feta, v. gr., sota els aspectes de «causalitat», «successió», «identitat», «substancialitat».... és, diríem amb una comparació física, com una explosió lluminosa amb color propi, produïda quan entre la «cosa en si» (el transcendent) i l'enteniment s'ha establert a distància convenient una diferència de potencial: «el sentit» és com la llum mental: la color pròpia correspon al «sentit especial» més o menys satisfactori i clar que té per a nosaltres, v. gr., una explicació feta amb la categoria «causa-efecte» sobre una altra que empri, per exemple, les categories de «necessitat i contingència». «El sentit intern», «la significació d'un judici», «d'un concepte», tal com es presenten a la consciència són, evidentment, quelcom d'original i propi nostre: ningú no els objectivarà, això és, no admetrà que pugui existir una realitat que sigui només una encarnació exacta i exclusiva del «sentit de l'explicació, de la nostra comprensió d'un fenomen mitjançant la categoria causa-efecte». El nostre Ortega i Gasset empra una altra comparació molt escaient, dins el seu sistema, tant suggeridor, del «perspectivisme»: ço que li permet de superar el kantisme, tot aprofitant les descobertes dels kantians. (1).

Funcionant, doncs, el nostre enteniment amb un cert nombre de categories, cadascuna amb un «sentit propi explicatiu», amb «un contingut aclaridor original», sempre existirà una diferència de potencial, d'estructura, entre l'enteniment i la cosa transcendent: la distància convenient per a l'explosió lluminosa, la determina la col·laboració de la sensibilitat amb l'enteniment, mitjançant els esquemes. No ens hi deturarem.

c) El judici, en tercer lloc, és el formador o creador dels objectes. La distinció entre «cosa en si» (Ding an sich) i «objecte»

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

(Gegenstand) és fonamental per a la comprensió de la filosofia alemanya. L'objecte comparat amb la cosa en si es pot aparionar amb les figures d'animals que la nostra imaginació delinea i fins veu, amb la col·laboració de la vista, en els núvols gegants d'una tarda de primavera.

I a la manera com podem dir que, en aquest cas, la imaginació *crea* els objectes però que no té sentit raonable posar qüestions sobre llur realitat en si, sobre l'existència objectiva d'aquests complexos de línies i interpretació que donen a les dades sensorials, així, segons les filosofies de descendència kantiana, *creem*, mitjançant les categories mentals, *objectes*, complexos de notes significatives reduïts a unitat interna significativa pel judici, sota el guiatge del principi normatiu d'identitat, però no posseeix cap sentit raonable preguntar si aquests objectes — que, per la unitat i cohesió interna entre llurs notes, se'ns presenten com mantenint-se drets en ells mateixos enfront de nosaltres (Gegen, stand) — gaudeixen d'una realitat en si.

La creació d'*objectes* és una funció intel·lectual molt superior a la formació de *conceptes*. L'objecte produeix en la consciència la impressió d'independència, d'autonomia envers el subjecte; impressió que solament és produïda quan el complex de notes, el sentit total, gaudeix d'una unitat interna i ensem amb una marcada distinció respecte a la resta de conceptes. Un concepte amb unitat interna pròpia i separació significativa total esdevé *objecte*. I solament aleshores causa en nosaltres la impressió originalíssima de la dualitat fonamental subjecte-objecte, punt de partença del problema crític. Amb una mica de reflexió podem resseguir perfectament aquesta evolució d'un concepte transformant-se en objecte i notar les impressions intel·lectuals pròpies. Poques són les ciències, com hem vist en parlar del mètode axiomàtic, que han aconseguit de transformar llurs conceptes en objectes, això és, arribar a la fase final de l'evolució intel·lectual i significativa. Anomenem *objectal* aquesta darrera funció del judici, i la segona, *categorial*.

II. LA LOGÍSTICA I LES LÒGIQUES CORRELATIVES DE CAIRE KANTIÀ. — 1) *La logística i la lògica de l'idealisme transcendental*.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

— Amb aquests preliminars podem ja determinar la posició i orientació pròpia de la logística.

És clar que un sistema total de lògica ha d'incloure l'estudi de les tres funcions del judici: sintètica, categorial i objectal, car totes tres tracten de les condicions bàsiques, inicials, de qualsevol ciència, tot prescindint de determinades significacions pròpies de les ciències particulars.

Anomenem *lògica correlativa* la que estudiï els tres aspectes, car el judici amb el seu funcionament relaciona el subjecte, el jo (amb la seva estructura interna categorial), amb l'objecte, mitjançant els conceptes: el judici desenvolupa les categories intel·lectuals en branques i fulles de conceptes i, finalment, les fa esbaldellar en les flors terminals, belles i perfectes, dels objectes.

Les lògiques bastides conscientment en aquesta triple direcció són: a) la *kantiana*, tractant la lògica transcendental en les tres direccions; la formació de conceptes en l'«Analítica transcendental», mitjançant les categories revelades en l'examen de l'estructura del judici; la creació dels objectes metafísics és estudiada en la «Dialèctica transcendental». Tot amb tot, la lògica kantiana té molts defectes dels quals no enumerarem sinó els que s'adiuen a la nostra tasca.

Primer: El punt de partença, massa estret; les ciències matemàtiques i la física newtoniana, no constituïdes aleshores axiomàticament; la qual cosa el menà a la falsa concepció de llurs proposicions com a judicis sintètics *a priori*, quan són pures definicions: no pas judicis ni analítics ni sintètics. Kant deixà de banda les creacions culturals humanes, les ciències històriques, les psicològiques, l'estudi transcendental de les quals l'hauria preservat del segon defecte. Segon: La inflexibilitat o rigidesa de les categories assenyalades per Kant. Els kantistes posteriors, per exemple Cassirer, han esmenat aquest defecte demostrant que les categories del nostre enteniment són una funció del temps, de la cultura; que hi ha altres categories, altres direccions conceptuais i constructives internes, més elementals i primitives. Les categories enumerades per Kant són una cristallització d'elles, una especialització forçada per les exigències metodològiques dels problemes científics de la física i matemàtiques del seu temps.

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

Notem ara una idea fonamental: «*Qualsevol lògica que admeti una estructura categorial, semblant a la kantiana, dins l'enteniment humà, no pot menar a una logística, i amb els mitjans d'aquesta arribar a les matemàtiques actuals.*»

En efecte: com hem estudiat àmpliament i hem notat en els llocs convenients, la logística moderna ha estat bastida fitant les matemàtiques; i les matemàtiques modernes empen com un dels conceptes fonamentals el de *conjunt* o *classe*. Dins una classe, però, és prou conegut que els elements components són tots equivalents, independents, sense ordre mutual, és a dir, el concepte de classe no posseeix *estructura interna*, els elements no són reduïts a *unitat* internament ordenada. Pensem un moment en els nombres naturals, 2, 3, 4, 5.....: el 5 és una classe (més acuradament, una classe de classes) els elements de la qual (les cinc unitats) són totalment independents entre elles, sense ordre intern; per tant, el concepte «5» és un concepte sense estructura interna. L'única categoria kantiana que intervé és la de pluralitat pura (*Vielheit*) i la seva complementària d'unitat: tota la teoria cantoriana dels conjunts, amb les seves immenses aplicacions a l'anàlisi i a la geometria es basa, doncs, en conceptes sense estructura interna, regulats per la categoria «pluralitat pura» fonamentalment.

Encara més: totes les operacions matemàtiques, llevat la de *pas al límit*, són operacions no estructurades; solament la presència de les propietats commutativa, associativa, uniforme, ens diuen a bastament la manca d'ordre, d'estructura interna en els resultats. L'operació de *pas al límit* forma una excepció i dona, com hem vist en el càlcul relacional, conceptes estructurats fins a un cert grau, v. gr., els de màxim, mínim, progressió, sèrie, continuïtat.....: l'examen, però, de la lògica relacional necessària per al tractament primfilat d'aquests conceptes ens palesarà que hi intervenen altres categories més primitives que les kantianes i que han estat estudiades per Cohen i Cassirer, com direm immediatament.

Però notem curiosament l'afirmació. Les matemàtiques modernes per a llur bastiment solament necessiten com a màxim tres categories o formes *a priori*, i mai els conceptes formats no posseeixen una estructura interna perfecta, car el concepte bàsic de nombre natural no la posseeix, i a gairebé totes les construccions

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

matemàtiques noves s'imposa com a norma metodològica (la legitimitat de la qual no discutim) que en qualsevol nou domini es conservin les lleis formals, commutativa, associativa, uniforme, amb les quals és incompatible l'ordre intern dels elements basitadors d'un concepte, puix que en el concepte propi d'ordre estructural entra almenys l'asimetria, inconciliable amb la commutativitat.

Ara bé: la logística moderna, com hem vist llargament, enclou en els mateixos axiomes inicials les propietats associativa, commutativa, uniforme. *Conseqüència*: amb la logística no podem bastir conceptes amb estructura interna perfecta.

D'això deduí: Un enteniment d'estructura categorial, bastidora de conceptes i objectes no es limitarà *espontàniament*, per la seva mateixa constitució, a la formació de conceptes internament no estructurats ni estructurables, com els matemàtics i logístics, o estructurats amb un parell de categories. El bastiment, doncs, d'una logística i de les matemàtiques modernes no és cap fita natural, el terme final propi d'un enteniment categorial: la fita i el terme naturals són molt més enllà.

Si cerquem, doncs, un enteniment l'estructura del qual mena naturalment a una logística i a les matemàtiques modernes, no el trobarem al kantisme, encara que el seu punt de partida històric sembli demanar-lo. I el que *a priori* hem afirmat, examinant les característiques del kantisme, ho ha confirmat la història: la logística no ha sortit dels treballs de filòsofs de filiació kantiana malgrat no haver planyut esforços per a assolir-ho!

b) *La logística en relació amb la lògica de l'idealisme transcendental*. — Dins l'escola idealista transcendental de Marburg recordem Hermann Cohen, introduint l'infinitesimal com a categoria nova (2). Natorp sent encara més l'atracció de les matemàtiques: introdueix com a categoria la noció de «sèrie»; redueix l'estructura lògica dels conceptes a l'estructura, més ben dit, manca total d'estructura del concepte de *classe*, i amb això assoleix bastir el concepte de *nombre* (3). I, amb tot, ni Cohen ni Natorp no pogueren trobar la logística, que és l'estadi inicial de les matemàtiques per ells estudiades.

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

El mètode transcendental els empenyia més enllà: el mateix Natorp, que havia escrit *Els fonaments lògics de les ciències exactes* (4), en la seva darrera obra *Lliçons sobre filosofia pràctica* (5) feia camí enrera i estudiava la categoria d'individualitat, d'unificació individual (Vereinzigung), totalment oposada a la de nombre i classe. El mètode transcendental, viscut pregonament, no mena, com a estadi definitiu, ni a la construcció de les matemàtiques ni de la lògica.

Cassirer, en la seva obra *Concepte de substància i concepte de funció* (6), contraposa, fonamentat en l'estudi històric del desenvolupament dels conceptes científics en les matemàtiques i en la física, la formació de conceptes amb els mitjans aristotèlics de gènere i diferència específica, «de classificació i ordenació dels conceptes per graus d'abstracció», sense ordre propi entre els elements subordinats als gèneres (entre les espècies), construcció i ordenació de conceptes que anomenarem *estratigràfica*, a la formació dels conceptes científics sota el guiatge del principi de *funcionalitat*, de llei ordenadora dels elements, que permet de deduir per especialització ordenada *tots* els elements, els inferiors i llurs propietats, sense pretericions; cosa que esdevé impossible amb el sistema aristotèlic de formació i ordenació dels conceptes. Una comparació ho aclarirà a bastament: el concepte aristotèlic de «vivent», «d'animal», no permet d'enumerar *a priori* totes les espècies subordinades, ni posar entre elles un ordre determinat i propi ni deduir *a priori* totes llurs propietats, i, donat un nombre d'elles experimentalment, no podem demostrar si n'hi falten algunes o si altres pertanyen a un altre gènere. En canvi, considerem el concepte de «funció de segon grau amb dues variables».

$f(x) \equiv a y^2 + 2 b y x + c x^2 + 2 d y + 2 c x + f = 0$, on a , b , c , d , f són constants arbitràries. Sabem que interpretant geomètricament les variables x , y mena a tres corbes: paràbola, hipèrbola, el·lipse; que, segons el valor de les constants, poden menar, la paràbola, a dues rectes paral·leles o a una sola recta; l'el·lipse, a la circumferència o a un punt; la hipèrbola, a dues rectes concurrents en l'origen. Podem dir que el concepte superior $f(x)$ (diguem gènere ordenador) enclou *directament i solament* tres conceptes subordinats (espècies ordenades), paràbola, hipèrbola, el·lipse; i aquests tres conceptes també enclouen, el primer, dos conceptes

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

nous subordinats, un complex de dues rectes paral·leles o una de sola; el segon, un només, dues rectes passant per l'origen de les coordenades, i el tercer posseeix com a subordinats dos conceptes nous: la circumferència i el punt.

Notem ara que aquesta subordinació de conceptes inferiors dista moltíssim de l'aristotèlica, per gènere i diferència específica: 1) determina *a priori* el nombre exacte de conceptes subordinats i resubordinats; 2) determina deductivament llurs propietats; 3) estableix un ordre entre ells.

En efecte, com demostra la geometria analítica, entre l'el·lipse, la hipèrbola i la paràbola podem posar un ordre asimètric, car cada una d'aquestes corbes prové d'un dels tres valors de l'expressió $\Delta \equiv b^2 - ac$ ($\Delta < 0$, $\Delta > 0$, $\Delta = 0$) restant entre elles ordenades de la mateixa manera que un nombre positiu, un altre de negatiu i un d'igual a zero, respecte al zero mateix. I una semblant discussió d'altres constants subordinades mena a les subespècies, ordenant-les entre elles. Ara, doncs, podem entreveure com la formació de conceptes, mitjançant el de funció, es diferencia completament de l'aristotèlic, inepte per a les ciències en fase evolutiva.

La formació de conceptes mitjançant el tipus de classe (tipus aristotèlic) és un estadi preliminar i imperfecte respecte a la formació de conceptes mitjançant el de funció. Històricament, el desenvolupament de la intel·ligència en la seva funció d'interpretar, de comprendre la realitat, no es detura al primer estadi, tendeix vers el segon. En ell es desplegaran completament les direccions evolutives internes, les virtualitats categorials de l'enteniment. Les categories kantianes són tretes de l'estudi dels judicis constitutius de les ciències en tant que formats amb el mètode aristotèlic: per això són massa rígides. Les veritables categories intellectuals solament es poden reconèixer en l'evolució, en les direccions conceptuals, en les quals les ciències progressives elaboren i primen llurs conceptes, i aquestes categories o direccions d'evolució constitutiva d'objectes són en les ciències físiques i matemàtiques les de funció i sèrie, segons Cassirer.

Tenim una superació del kantisme introduint l'evolució en les categories.

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

Però notem ara de nou com el mètode transcendental, que Cassirer empra en la seva més pregonada essència, mena no pas a una logística ni a una teoria cantoriana dels conjunts, a una aritmètica cardinal, ni es pot deturar en cap classe de matemàtiques, sinó més enllà, a una lògica transcendental. Si estructurem els conceptes, avançant més i més en la direcció d'imposar *ordre propi* entre els elements o conceptes subordinats, no podrem deturar-nos ni en matemàtiques ni en la logística, que admeten com a axiomes inicials o conseqüències d'ells les propietats commutativa, associativa, uniforme, el nombre i les seves classes actuals.

Quan l'enteniment humà haurà desenvolupat completament la categoria, funció, sèrie, les matemàtiques i la logística actuals hauran estat superades en una direcció contrària; gairebé diria que no restarà de les matemàtiques sinó l'operació «pas al límit» i de la logística un tros del càlcul relacional. Si volem, doncs, bastir la logística i les matemàtiques actuals, no podem fer camí amb Cassirer. Cassirer, que en l'obra adduïda encara sentia, com Kant, l'atracció de les matemàtiques i hi creia (una mica menys que Kant, certament) com a punt de partença i control propi de les categories o estructura de l'enteniment, se'n desvià definitivament en el sentit i esperit autènticament kantian, i continuà les seves investigacions sobre les virtualitats formatives de conceptes vivents en el nostre enteniment, no pas en el terreny matemàtic i físic, sinó en el de les formes simbòliques, en el llenguatge, en les manifestacions de la consciència formadora dels mites (7), treballant no pas amb les categories rígides de Kant, sinó amb altres de noves, flexibles i que es desenvolupen amb el temps.

c) La funció categorial del judici, manifestant-se com a funció sintètica, formadora dels conceptes, no mena ni pot menar a una logística ni a les matemàtiques actuals. Completament aquesta afirmació, importantíssima per a la valoració científica del kantisme, amb una nova afirmació: «la funció objectal», darrer estadi del treball sintètic i categorial de l'enteniment, tampoc no ens permetrà d'arribar a ambdues ciències. Els estudis més pregonats que dins la direcció kantiana han estat fets de la funció objectal de les categories són, sens dubte, els de Bruno Bauch, *Verität, Valor i Realitat* (8) i el de Nicolau Hartmann, *Línies fonamentals d'una*

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

metafísica de la coneixença (9). Amb Bruno Bauch hem d'introduir al costat de les nocions «cosa en si» (Ding an sich), i objecte (Gegenstand), la de realitat (Wirklichkeit). Ja indicàrem que el judici, com a funció desenvolupadora i manifestadora de l'estructura interna de l'enteniment, produeix els conceptes i els objectes o conceptes amb independència pròpia, amb fronteres definides. Ara bé: Bruno Bauch remarca mestrívolament que cap concepte no pot esdevenir objecte, parlant amb precisió, si no arriba a sintetitzar ordenadament totes les construccions mentals, això és, un concepte no esdevé objecte sinó quan, mitjançant els conceptes i llurs unions, s'han desenvolupat, s'han manifestat totes les virtualitats constructives, totes les categories intel·lectuals. És clar que aleshores no existeixen *objectes*, sinó un sol *objecte*, i aquest *objecte* és *la realitat*; car, només amb aquestes condicions d'exteriorització conceptual total de l'enteniment, l'oposició subjecte-objecte esdevé *màxima i irreductible*. L'enteniment, esgotat categorialment, no pot *afegir res a l'objecte* ni modificar-lo en la seva estructura. I, veritablement, cap objecte científic o cultural no té fronteres pròpies absolutes: tots s'uneixen i es troben en plena evolució constructiva d'unitats conceptuais superiors. El *pas al límit* conceptual, necessari per a la formació de *l'objecte* autònomament, no s'és encara aconseguit: està en esdevinença. Sota aquest aspecte és clar que Bauch no admet com a punt de partida un conjunt de ciències determinades: són necessàries, i encara no suficients, totes les manifestacions de l'esperit humà. Ara bé: una lògica transcendental d'aquest tipus no pot deturar-se en una logística ni en les matemàtiques actuals: les ultrapassa de molt. És massa clar perquè ens deturem a demostrar-ho. Hartmann avança una mica més en la direcció semimetafísica de Bauch, i, tot admetent com ell la independència de l'objecte (del concepte, portat, per una operació mental de *pas al límit*, a la dignitat i independència d'objecte) enfront del seu coneixement, afirma que el procés cognoscitiu només fa objectes parcials, retalls finits amb un caire d'objectivitat i d'oposició amb el subjecte (einen objizierten endlichen Ausschnitt) (10); retalls que, per un procés semblant a un *pas al límit*, anem completant. Però (i en això se separa de Bauch) aquest procés té un límit superior insuperable: esgotant

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

les virtualitats constructives de conceptes, bastirem un *objecte* que no exhaurirà l'ésser. L'equació aristotèlica ésser = intelligibilitat és rodonament negada per Hartmann.

Notem ara un tret comú a la lògica transcendental de Bauch i Hartmann. Ambdues tenen un caire metafísic, ontològic: «predomini de l'objecte», de «l'únic objecte». Ambdues, sobretot Hartmann, remarquen que en arribar a la construcció de l'objecte únic total, en ell es trobarà com a part notable el mateix subjecte amb la seva estructura, en altres paraules, el problema ontològic de l'objecte és lògicament anterior al del subjecte. Assemblant-se aquesta manera d'esguardar la qüestió criteriològica a la tomista, en la qual l'ontologia és bastida abans de la teoria de la coneixença, i estudiar l'ésser determina consegüentment l'ésser i la naturalesa de les facultats cognoscitives (11).

Pel que fa a la nostra tasca, diem: les idees directives de Bauch i Hartmann, portades a llurs naturals termes «construcció de l'objecte», no es deturaran en una logística ni en unes matemàtiques de l'estructura conceptual de les actuals: l'estructura dels axiomes d'aquestes ciències ho impedeixen. Ensems aquestes idees de Bauch i Hartmann, i, en general, dels sistemes neokantians, ens adverteixen d'un defecte inseparable de qualsevol lògica i matemàtiques que pretenguin bastir-se *axiomàticament*, complint, ultra les condicions naturals de compatibilitat i independència dels axiomes, la condició d'*integritat* (Vollständigkeit) (12), segons la qual un sistema d'axiomes és *íntegre* quan l'addició d'una nova fórmula no deduïble dels axiomes al conjunt de les fórmules fonamentals del sistema mena a una contradicció. Aleshores aquest sistema d'axiomes defineix implícitament un *sol sistema d'objectes propis*, el sistema admet una sola interpretació: aquest sistema s'anomena monomorf. En són exemples el càlcul proposicional, el sistema d'axiomes de Hilbert per a la geometria euclidiana, el sistema d'axiomes dels nombres naturals en la forma donada per Russell (13); quan el sistema d'axiomes geomètrics permet moltes interpretacions, hi ha molts objectes que compleixen els axiomes. Doncs bé: la mateixa evolució de les matemàtiques i de la logística ha palesat que la condició de suficiència no pot ésser acompanyada en cap sistema d'axiomes (14), la qual cosa equival a l'afirmació,

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

filosòficament molt important, que dins les ciències especials, dins les matemàtiques i la logística no poden ésser bastits objectes estrictament tals, amb independència plena, amb estructura interna tan arrodonida que no depenguin ni dimanin d'altres per a llur perfecció. Tot això confirma la tesi que defensem: una lògica transcendental, bastida dins l'esperit kantian, dirigida a formar objectes, no pot deturar-se en les matemàtiques i la logística ni solament com a objectes secundaris; car, en realitat, els conceptes d'aquestes ciències no gaudeixen de la independència suficient per a esdevenir objectes, malgrat que els axiomes o judicis inicials pretenguin retallar un sistema de conceptes propis amb dignitat d'objecte.

Hem demostrat, doncs, que «aquesta infecunditat del kantisme en llur forma clàssica i moderna respecte a la formació de la logística i de les matemàtiques no és casual i s'endinsa en la mateixa essència del mètode transcendental». Una lògica correlativa que estudiï les tres funcions del judici, sintètica, categorial i objectal no pot menar naturalment a la construcció de la logística i de les matemàtiques modernes. Deixem, doncs, aquesta via i trenquem cap a les lògiques polars, és a dir, orientades unilateralment (15).

III. LA LOGÍSTICA I LES LÒGIQUES POLARS.

a) La logística en relació amb les filosofies del «valor».

Per lògica polar entendrem una lògica bastida en una sola direcció conceptual, vers el subjecte o vers l'objecte únicament, en lloc d'unir, mitjançant el judici, l'estructura interna categorial del subjecte amb els objectes a través els conceptes, com feia qual-sevol lògica correlativa d'esperit kantian. No ens deturarem en l'estudi de les lògiques polars orientades vers el subjecte, car és evident que un desenrotllament lògic d'una tal direcció no menarà a una logística ni a les matemàtiques modernes. Les lògiques polars suposen que la direcció evolutiva de l'enteniment humà és inversa a la kantiana. En aquesta el judici amb el seu funcionament desplega ordenadament les categories, formant conceptes científics i creant objectes, o en el límit, l'objecte per antonomàsia, la realitat, en tota la seva amplària. En les lògiques polars orien-

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

tades vers el subjecte, el camí és invers: es parteix o no dels objectes, dels conceptes, per a arribar sempre a les categories i endinsar-se vers un fons més primitiu dins el subjecte. En aquestes lògiques predomina l'estudi de la relació vers el «jo» (Ichbezogenheit), inclosa en qualsevol contingut significatiu mental. La noció de veritat i els seus criteris és substituïda per la preeminència atorgada per aquestes lògiques al concepte de «valor» i, consegüentment, a les ciències històriques i manifestacions culturals, en les quals domina el concepte de «norma» i «valor» sobre les matemàtiques regides pel de veritat. L'activitat mental s'ordena a crear valors, normes, no a fer objectes. En les creacions artístiques, en les invencions dels economistes, en tots els acudits genials que fan avançar qualsevol manifestació humana, no té cap sentit preguntar si són veritables o falses, sinó solament si arriben a normes, si manifesten un nou valor. La novena simfonia de Beethoven no és ni veritable ni falsa: és, abans que tot, un valor, una norma musical suprema. En les ciències on domina la veritat (ciències nomotètiques, com les anomenava Windelband) l'ideal és *deduir*, i per assolir-lo més segurament, axiomatitzar, fixar. En les manifestacions orientades vers el subjecte (ciències idiogràfiques), vers el seu desenvolupament interior, la *creació* és el terme, que sempre desballesta els models tradicionals, els valors petrificats. Deducció i creació, objecte i valor són les dues direccions oposades de les lògiques orientades vers l'objecte i el subjecte. Aquestes darreres lògiques fàcilment terminen en una psicologia, quan pretenen estudiar el problema de la validitat dels valors (16). Recordem ací Windelband i, sobretot, Rickert, el seu continuador lògic (17), o d'altres lògiques d'empremta més psicològica, com les de Wundt (18), Sigwart (19), Erdmann (20) i més modernament les de Höffding (21) i Döring (22). D'aquestes lògiques d'esperit kantian amb *signe negatiu* no poden sortir la logística ni les matemàtiques modernes. Hem de rompre amb la direcció kantiana si volem arribar-hi.

Quedem-nos amb l'objecte sol per tal de veure si en aquest terreny pot desenvolupar-se la logística i, per tant, les matemàtiques modernes. Ens reduïm a les lògiques polaritzades vers l'objecte, no com a terme de l'evolució dels conceptes, que això hem vist en la primera part que entrebancava d'arribar-hi, sinó

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

polaritzades vers l'objecte com a preliminar al subjecte, com a guiador del seu desenrotllament mental; la qual cosa suposa la negació de categories o formes *a priori*.

Estudiarem ací dos sistemes, el fenomenologista de Husserl i l'aristotèlic, i veurem com, atansant-se força als pressupòsits necessaris per a bastir una logística, enclouen encara dues restriccions que els destorben d'arribar al terme. I amb això podrem fixar definitivament sota quines condicions és possible de començar la construcció d'ambdues ciències.

b) *La logística i la fenomenologia de Husserl.* — En el sistema fenomenològic, sota la seva forma clàssica de les *Investigacions lògiques* (23), dues són les idees cabdals: la d'«unitats de significació» (Bedeutungseinheiten) o «significacions en si», i l'acte intel·lectual especial per a capir-les, la «Wesensschau». Tots sabem prou bé què vol dir «significació», car vivim aquest fenomen en comprendre qualsevol proposició. En qualsevol significació trobem un contingut significatiu i una relació a l'acte mental: qualsevol significació significa quelcom i ho significa a algú, al cognoscent. Si per abstracció prescindim d'aquest darrer aspecte, obtenim «les significacions en si», «pures». La significació pura de la proposició, «Totes les funcions diferenciables són contínues» és sempre idèntica, única, encara que en ella pensin simultàniament tots els matemàtics del món; independent de la producció dels actes amb els quals la comprenem; preliminar a ells. La seva existència no és pas real, com la nostra i la dels objectes externs, ni purament abstracta, car, aquestes significacions, no les produïm nosaltres, se'ns imposen i s'imposen a qualsevol enteniment diví o creat, encara que no treballi amb abstraccions. Tenen, doncs, una pròpia manera d'ésser, que demanarà, per consegüent, una original manera de contemplar aquestes «significacions pures», diferent de la intuïció de l'ésser real i del coneixement de l'ésser abstracte, és la «Wesensschau», «la contemplació essencialista».

Deixem de banda les qüestions sobre la legitimitat d'introduir una tercera classe de realitat i una nova classe d'acte intel·lectual. Notem només que caldria estudiar més detingudament les relacions entre la «intuïció essencialista» i l'«abstracció funcional», car aquesta

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

mena d'abstracció, posseix propietats noves, essent d'una estructura diferent del tot de l'abstracció aristotèlica i de la intuïció sensible. L'abstracció funcional produeix *objectes*, unitats de significació, amb els caràcters de transcendència indicats; la qual cosa no assoleix l'abstracció aristotèlica. Passant ara al nostre tema diem: la fenomenologia de Husserl no pot menar a la logística i a les matemàtiques actuals; car l'operació intel·lectual nova, la contemplació essencialista, la «Wesensschau» no pot bastir ciències axiomàtiques que: 1) defineixen tan sols implícitament llurs objectes; 2) els axiomes de les quals, sobretot a la logística, no posseeixen contingut significatiu; 3) llurs mètodes demostratius i constructius de les conseqüències són purament formals, gairebé mecànics, sense atendre mai al significat del estadis intermedis: són *operations* no pas «*ideations*».

Tenim una nova conseqüència important: «cap sistema lògic que empri com a mitjans constructius de conceptes i demostracions la contemplació del significat conceptual dels elements emprats no pot menar a una logística i a les matemàtiques modernes».

L'intent de Husserl en la seva «Lògica formal i Transcendental» no es mou en el plà estricte de la logística i n'empra ben poca cosa.

c) *La lògica aristotèlica i la logística.* — Examinem ara la lògica aristotèlica (24). Posseeix moltes de les condicions exigides per al nostre intent. 1) L'enteniment no posseeix categories ni formes *a priori* que desviïn les construccions mentals vers l'objecte total o vers el subjecte. 2) En ella dominen el concepte de classe i la formació i ordenació dels conceptes i dels individus segons el mètode classificador estratigràfic; no demana estructura interna ni ordre propi als individus sotmesos a l'espècie, ni a les espècies sotmeses al gènere. 3) Defensa la tesi que el principi d'individuació és la matèria i la quantitat, això és, el conjunt d'individus forma una multitud pura i deslligada. Defensa la perfecció interna, la immutabilitat de les essències, de les espècies, la qual cosa equival a fer-les *independents* entre elles. Ambdues afirmacions són aptíssimes per a la construcció de la logística i de les matemàtiques. Hom veu que les propietats associativa, commutativa, uniforme s'aplicaran perfectament a objectes independents,

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

sense ordre ni subordinació mútua, i aquestes propietats entren sempre en els axiomes inicials d'ambdues ciències. 4) La lògica aristotèlica, sobretot la seva teoria clàssica del sillogisme, formula les regles prescindint del significat de les proposicions emprades i encara que demostrï conceptualment les regles per a la selecció dels modes vàlids, això és solament un defecte esmenable i esmenat per la logística. 5) La lògica aristotèlica és en un cert grau simbòlica, com ha d'ésser qualsevol ciència en la qual el significat de les proposicions emprades no interressi, i els processos demostratius siguin formals. Si de fet la lògica aristotèlica no menà a la logística, la causa és que Aristòteles i els escolàstics la bastiren tot esguardant la metafísica, no pas les matemàtiques. En canvi, la lògica aristotèlica en mans de Leibnitz es transformà en el programa general de la logística, i aquesta direcció ha estat continuada i desenvolupada totalment en la logística moderna.

d) Les condicions preliminars de la logística. — Ara podem reprendre breument el nostre camí, una mica llarg, i fixar definitivament els pressupòsits filosòfics necessaris per a la bastida de la logística i de la seva natural continuació: les matemàtiques modernes.

1) Qualsevol lògica que admeti una estructura categorial (semblant a la kantiana) dins l'enteniment no pot menar naturalment a una logística: la logística és incompatible amb la lògica transcendental.

2) La logística és incompatible amb el «pas al límit» que mena dels conceptes als objectes i l'objecte total «com a límit suprem», car la destrueix com a ciència en els seus axiomes inicials.

3) La logística és incompatible amb el «pas al límit» invers que mena vers l'estructura del subjecte, o vers la categoria de «valor», vers la funció «creació», car destrueix el mètode deductiu formal i la condició de suficiència imposada als axiomes inicials.

4) La logística és incompatible amb una lògica de direcció «contemplativa del contingut significatiu explícit» dels elements i proves emprades, car el mètode axiomàtic exclou definicions explícites i proves no formals.

5) La logística és incompatible amb una lògica formal, or-

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

denada a una metafísica, car la metafísica és ciència de l'ésser, que no pot ésser quelcom d'implícit, de les essències que han d'ésser directament i explícitament intelligibles. La unió entre els éssers no és per mitjans deductius que res no aporten de nou, sinó mitjançant la causalitat eficient, formal o final que sempre enclouen quelcom de nou, d'original.

6) La logística és, doncs, una lògica formal desenvolupada en direcció a les matemàtiques, guiada, doncs, pel concepte de classe o conjunt.

IV. VALORACIÓ FILOSÒFICA FINAL DE LA LOGÍSTICA. — Moltes qüestions hem de deixar de banda, per no allargar massa la present introducció, si volem dir dues paraules només sobre el valor filosòfic total de la logística.

1) L'esdevenidor immediat de la logística es troba en una influència sobre les matemàtiques i la física. En efecte: les matemàtiques actuals, gairebé senceres, poden ésser bastides deductivament amb els mitjans de la logística clàssica. No cal recordar la preeminència, dominis i fecunditat de la física tractada matemàticament; la logística i els seus conceptes, sobretot la lògica relacional, encara no ha estat aplicada a la física i sembla *a priori* que un estudi logístic dels conceptes i mètodes constructius de la física teòrica hauria d'aportar molta llum, com n'ha escampada sobre els conceptes superiors de les matemàtiques. Sota aquest punt de mira la lògica matemàtica intuïcionista, introduint més conceptes primitius, simplificaria moltíssim el tractament logístic d'aquestes ciències i, sobretot, un ús sistemàtic de les lògiques no-aristotèliques, amb molts valors intermedis entre *V* i *F* en sentit ordinari, permetria immediatament tractar el problema cabdal del principi de causalitat física, que cal substituir amb el de probabilitat, vers un límit màxim abans de *V* definitiva; la qual cosa demanen les lleis atòmiques i s'imposa cada dia més i més als físics més imparcials. Una lògica de tipus plurivalent mena immediatament al càlcul de les probabilitats, els dominis del qual s'estenen constantment en la física teòrica, per tal com totes les lleis físiques semblen pertànyer al tipus de llei probabilística i no al determinista (25).

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

2) La logística clàssica és l'estadi primordial d'una lògica exacta, deductiva, que mena ella mateixa a la seva superació ordenada sense perdre ambdues propietats necessàries per al progrés científic segur. L'exactitud és una de les qualitats més preades de qualsevol ciència. Aquesta qualitat ha fet possible l'avenç continu i ferm de les ciències físiques, i serà certament causa de nous progressos dins la lògica. La logística clàssica és com el nucli primari de cristallització entorn del qual s'aniran ordenant gradualment tots els altres aspectes lògics, superant les restriccions inicials, necessàries al començament de qualsevol ciència, sense perdre, però, les línies estructurals fermes del mètode deductiu purament formal, del mètode axiomàtic, del mètode simbòlic.

Cal, doncs, començar amb l'estudi de la logística clàssica, no pas com a estadi final i perfecte de la lògica, sinó a semblança de l'estudi de les matemàtiques elementals, per a avançar més i més amb seguretat, amb mètode, en la mateixa direcció, amb eixamplaments ordenats.

3) Aquestes superacions progressives de la logística ens permetran de continuar-la amb les lògiques transcendents, amb les altres branques filosòfiques. Aquesta articulació és una necessitat filosòfica primordial. L'eixamplament progressiu de la logística ens farà superar la restricció de la lògica aristotèlica bivalent i potser assolirem, com a estadi transitori, una lògica més acomodada a la metafísica tomista, que, mitjançant el concepte i graus de potència, ha superat el dualisme simplista «ésser, no-ésser». La introducció de més conceptes inicials amb la consegüent superació del formalisme ens articularà amb la lògica intuicionista i fenomenològica com els mateixos intuicionistes reconeixen.

I, sobretot, la superació de la condició d'integritat imposada al mètode axiomàtic i que, si fos vàlida, atomitzaria totalment en objectes independents el camp filosòfic i científic, ens permetrà de posar-nos en continuïtat amb les lògiques transcendents.

La direcció general d'evolució que, des del punt de vista filosòfic, hem de desitjar a la logística i que, de fet, segueix el seu desenvolupament, és superació de la logística clàssica de Frege, Peano, Russell, Hilbert, amb la intuicionista de Brouwer i Heyting, i ambdues superar-les en direcció a les lògiques plurivalents més

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA

flexibles i més acomodables a la física moderna, que cada dia s'aparta més i més del tipus determinista absolut, de la modalitat lògica «necessitat», imposada pel càlcul diferencial i per la lògica clàssica bivalent; per atansar-se al tipus probabilístic de llei, de la modalitat lògica «contingent» només tractable amb lògiques plurivalents, primfiladores delicadament dels matisos entre *V* i *F*. Amb això s'esvairà ben aviat també de les matemàtiques amplia-des, (natural continuació d'aquestes lògiques) i dels pocs dominis que encara li resten dins la física, el concepte de «necessitat-determinisme», i ens trobarem amb una lògica, matemàtiques i física de caire «espontaneïtat» amb lleis que per llur mateixa estructura es superen a elles mateixes amb freqüència relativa, o, amb una frase no del tot correcta, enclouen llurs excepcions dins la regla mateixa. Aquesta espontaneïtat minvarà la distància entre física i biologia, a favor de la biologia, en contra del materialisme determinista i mecànic i ens trobarem ja en una direcció clarament psicològica, orientada com vers un terme superior a la filosofia, que és ciència universal.

1. *J. Ortega y Gasset*. Obras completas. 1932; Filosofía pura, pàgines 882-886.
— El tema de nuestro tiempo; pàgs. 814-815.
2. *H. Cohen*, Logik der reinen Erkenntnis, 1902.
3. *P. Natorp*, Logik, 1910.
4. *P. Natorp*, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, 1921.
5. *P. Natorp*, Vorlesungen über praktische Philosophie, 1925.
6. *E. Cassirer*, Substanzbegriff und Funktionsbegriff, 1910.
7. *E. Cassirer*, Theorie der symbolischen Formen, I, II i III; 1923-1929
8. *B. Bauch*, Wahrheit, Wert und Wirklichkeit, 1923.
9. *N. Hartmann*, Grundzüge einer Metaphysik der Erkenntnis, 1925.
10. *N. Hartmann*, ob. cit., pàgs. 47-389.
11. *R. Kynast*, Logik und Erkenntnistheorie der Gegenwart, 1930; pàgs. 13 i 14.
J. Maréchal, Point de Départ de la Métaphysique. Cah. v, pàgines 12-32.
12. *D. Hilbert*, Axiomatisches Denken. Math. Ann., LXXVIII, 405; 1918.
H. Weyl, Philosophie der Mathematik. Handbuch der Phil. Abt., II A; 1926.
A. Fränkel, Einleitung in die Mengenlehre, pàgs. 268-334; 1928.
13. *N. Whitehead* i *B. Russell*, Principia mathematica, I²; 1925 (segona part).
B. Russell, Einführung in die mathematische Philos. (edició alemanya, 1930), pàgs. I-II.
14. *K. Gödel*, Über formal unentscheidbare Sätze. Monatsheft. f. Math., XXXVIII, 173; 1931.
J. Jögersen, Über Ziele und Probleme der Logistik. Erkenntnis, III, 96-100; 1933.
15. *R. Kynast*, ob. cit., pàgs. 16-51.
16. *R. Kynast*, ob. cit., pàgs. 39-41.
17. *H. Rickert*, Der Gegenstand der Erkenntnis, 1928.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

18. *W. Wundt*, Logik (tres volums), 1906-1908.
19. *Chr. Sigwart*, Logik, 1911.
20. *B. Erdmann*, Logische Elementarlehre, 1923.
21. *H. Höfding*, Der Totalitätsbegriff, 1917. Der Relationsbegriff, 1922.
22. *A. Döring*, Grundlinien der Logik, 1912.
23. *E. Husserl*, Logische Untersuchungen, I i II; 1922.
J. Geysen, Erkenntnistheorie, pàgs. 40-65; 1922.
24. *H. Scholtz*, Geschichte der Logik, pàgs. 22-48; 1931.
25. *H. Reichenbach*, Kausalität und Wahrscheinlichkeit. Erkenntnis,
I, 170-188; 1930.
H. Reichenbach, Über kausale und statistische Gesetzmässigkeit.
Erkenntnis, I, 189-219; 1930.
W. Heisenberg, Kausalgesetz und Quantenmechanik. Erkenntnis,
II, 172-182; 1931.

BIBLIOGRAFIA

A

- Ackermann, W.*, Begründung des «tertium non datur». Math. Ann., XCIII; 1924.
 — Die Widerspruchsfreiheit des Auswahlaxioms. Nachr. d. Ges. d. Wiss. z. Göttingen, 1924.
 — Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen. Math. Ann. XCIX; 1928.
 — Über die Erfüllbarkeit gewisser Zähl ausdrücke. Math. Ann., 1929.
Ajdukiewicz, K., Beiträge zur Methodologie d. deduktiven Wiss., 1921.

B

- Bauch, B.*, Wahrheit, Wert und Wirklichkeit, 1923.
Behmann, H., Mathematik und Logik, 1927.
 — Beiträge zur Algebra der Logik. Math. Ann., LXXXVI; 1922.
 — Zu den Widersprüchen d. Logik u. Mengenlehre. Deuts. Math. Ver. Prag., 1929.
Bernays, P., Axiomatische Untersuchung d. Aussagenkalkül der Prin. Math. Math. Zeitsch., XXV; 1926.
 — Die Philosophie der Mathematik. Blätter f. Philosophie, IV; 1930.
 — i *Schönfinkel*, Zum Entscheidungsproblem d. math. Logik. Math. Ann., XCIX; 1928.
 — Probleme der theoretischen Logik. Unterr. f. Math., 1927.
Bernstein, B., A set of four independent postulates for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc., XVII; 1916.
Boole, G., The mathematical analysis of logic, 1847.
 — An investigation of the laws of thought, 1854.
 — The calculus of logic. Camb. and Dublin Math. Journ., III; 1848.
 — On an general method of the theorie of probabilities. Phil. Mag. ser., IV, 7; 1854.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

- Brouwer, L. J.*, Intuitionisme en formalisme. Anttritsrede. Groningen, 1912.
- Intuitionistische Mengenlehre. Jahr. ber. d. Deutsch. Math. Ver., 1919.
- Begründung der Funktionenlehre unabhängig vom logischen Satze von ausgeschlossenen Dritten, I; 1923.
- Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. Math. Ann., 1925-26.
- Intuitionistische Betrachtungen über Formalismus. Sitz. Ber. d. Preuss. Ak. d. Wiss., 1928.
- Mathematik, Wissenschaft und Sprache. Monatsheft. f. Math., 1929.
- Burali-Forti*, Logica matematica, 1894.
- Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science. Enseignement mathém., 1899.

C

- Carnap, R.*, Physikalische Begriffsbildung, 1926.
- Eigentliche und uneigentliche Begriffe. Symposion, 1927.
- Der logische Aufbau der Welt, 1928.
- Abriss der Logistik, 1929.
- Cassirer, E.*, Substantzbegriff und Funktionsbegriff, 1910.
- Theorie der symbolischen Formen, I, II i III; 1923-1929.
- Chwistek, L.*, The theorie of constructives types, 1923-25.
- Neue Grundlagen d. Logik und Mathematik. Math. Zeitschr., 1929.
- Cohen, H.*, Logik der reinen Erkenntnis, 1902.
- Couturat, L.*, La logique de Leibnitz, 1901.
- Les définitions mathématiques. Enseignement mathém., 1905.
- Définitions et démonstrations mathém., Ibid., 1905.
- Les principes des mathématiques, 1905.
- Die Prinzipien der Logik. Enzykl. d. Phil. Wiss., I; 1912.

D

- Dalgarno, G.*, Ars signorum, vulgo caracteristica universalis et lingua philosophica. 4.^a ed.; 1834.
- Davidson, W.*, The logic of definition, 1885.
- Döring, A.*, Grundlinien der Logik, 1912.

BIBLIOGRAFIA

- Dubislaw, W.*, Über das Verhältnis der Logik und Math. Ann. d. Phil., 1925.
- Über die sogenn. analytischen und synthetischen Urteile, 1926.
 - Die Friesische Lehre von der Begründung, 1926.
 - Zur kalkülmässigen Charakterisierung der Definitionen. Ann. d. Phil., 1928.
 - Zur Lehre der sog. schöpferischen Definitionen. Phil. Jahr., 1928-29.
 - Zur Methodenlehre des Kritizismus, 1929.
 - Zur Philosophie der Math. und Naturwiss. Ann. d. Phil., 1929.
 - Über die Definitionen durch Abstraktion. Archiv. f. syst. Phil., 1929.
 - Elementarer Nachweis der Widerspruchlosigkeit des Logikkalküls. Crelle's Journal d. Math., 1929.
 - Zur Wahrheitstheorie. Phil. u. Schule, 1930.
 - Über den sog. Gegenstand der Math. Zeitsch. Erkenntnis, 1930.
 - Die Definition. 3.^a ed.; 1931.
 - Philosophie der Mathematik in der Gegenwart, 1931.

E

Erdmann, B., Logik, 1923.

F

- Fränkel, H.*, Einleitung in die Mengenlehre, 1928.
- Frege, G.*, Begriffsschrift, 1879.
- Über den Zweck d. Begriffsschrift. Sitz. d. Jenaer Ges. f. Med. u. Natw., 1879.
 - Die Grundlagen der Arithmetik, 1884.
 - Grundgesetze der Arithmetik, 1893-1903.
 - Über d. Grundlagen d. Geometrie. Jahr. ber. d. D. Math. Ver., 1903.
- Fries, J.*, Logik, 1914.

G

- Geyser, J.*, Erkenntnistheorie, 1922.
- Girard, H.*, La philosophie scientifique, 1880.
- Gonseth, F.*, Les fondements des mathématiques, 1930.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

- Grelling-Nelson, L.*, Bemerkungen z. d. Paradoxien. Abh. d. Friessch. Schule, 1906.
Garcia, D., Assaigs moderns per a la fonamentació de les matemàtiques. Soc. Catalana de Ciències, 1933.

H

- Hadamard, J.*, La logistique et la notion de nombre entier. Rev. gén. des Sciences, 1906.
Hahn, O., Über die Koeffizienten einer logischen Gleichung. Arch. f. syst. Phil., xv; 1909.
— i *Neurath, O.*, Zum Dualismus in der Logik. Ibid., xv; 1909.
Hartmann, N., Grundzüge einer Metaphysik der Erkenntnis, 1925.
Heisenberg, W., Kausalgesetz und Quantentheorie. Erkenntnis, II; 1931.
Heyting, A., Die formellen Regeln d. intuitionistischen Logik. Sitz. Ber. d. Preuss. Ak. d. Wiss., 1930.
Hilbert, D., Axiomatisches Denken. Math. Ann., 1918.
— Neubegründung d. Math. Abh. d. math. Seminars. Hamburg, 1922.
— Die logischen Grundlagen d. Math. Math. Ann., 1923.
— Über das Unendliche. Math. Ann., 1925.
— Die Grundlagen d. Mathematik. Abh. Sem. Hamburg, 1928.
— i *Bernays* Grundlagen der Mathematik. Vol. I, 1934.
— i *Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, 1928.
Höfding, H., Der Totalitätsbegriff, 1927.
— Der Relationsbegriff, 1922.
Höfler, A., Logik, 1922.
Husserl, E., Logische Untersuchungen, 1922.
— Philosophie d. Arithmetik, 1891.
— Ideen zu einer reinen Phänomenologie....., 1913.
— Formale und transzendente Logik, 1929.

J

- Jevons, W.*, Pure Logic or logic of quality, 1864.
Jørgensen, J., Über Ziele und Probleme der Logistik. Erkenntnis, III; 1933.
— A Treatise of Formal Logic, I, II i III; 1931.
Johson, W., The logical calculus. Mind, I; 1892.
— Sur la théorie des équations logiques. Bibliot. Cong. Int. Phil., 1900.

BIBLIOGRAFIA

K

- Kant, E.*, Kritik der reinen Vernunft. Ed. Cassirer.
Kempe, A., Memoir on the theorie of mathematical form. Phil. Trans. of the Royal Soc., 1886.
Kynast, R., Logik und Erkenntnistheorie der Gegenwart, 1930.
König, J., Neue Grundlagen der Logik....., 1914.

L

- Ladd-Franklin, C.*, On the algebra of logic. Studies in logic, by John Hopkins University.
Leibnitz, G., Über die universelle Synthese u. Analyse. Ob. complet. Ed. Gerhard, VII.
 — Nouveaux Essais. Ed. Raspe, 1765.
 — Characteristica universalis. Ed. Gerhard, VII.
 — Scientia Generalis, XIX, XX. Ibid.
Lewis, C. I., A survey of symbolic logic, 1918.
Lewy, P., Sur le principe du tiers exclu. Revue de Méthaphys. et Mor., 1928.
Löwenheim, L., Auflösung von Gleichungen im logischen Gebiet. Math. Ann., LXVIII; 1910.
 — Über Transformationen im Gebietekalkül. Ibid., LXXIII; 1913.
 — Über Möglichkeiten im Gebietekalkül. Ibid., LXXVI; 1915.
Lukasiewicz, J., Über die Umkehrbarkeit des Verhältnisses des Grundes und der Folge. Przegląd Filozoficzny, 1913.
 — Über den Satz des Widerspruches bei Aristoteles. Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1909.
 — Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1913.
 — Über die dreiwertige Logik. Lemberg, 1920.
 — Philosophischen Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. Varsòvia, 1930.

M

- Mac Coll, H.*, The calculus of equivalent statements. Proc. Lond. Mathem. Soc., 1877-1898.
 — Symbolical reasoning. Mind., 1880-1906.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

- Mac Coll, H.*, Symbolical logic and its applications, 1906.
— On the growth and use of symbolical language. Mem. Manchest.
Lit. and Phil. Soc., 1881.
Mac Farlane, A., On exact analysis as the basis of language. Trans.
Tex. Ac. of Science, 1892.
Maréchal, J., Le point de Départ de la Métaphysique, v; 1926.
Moore, E., On the foundation of mathematics. Am. Math. Soc. Bull.,
1903.
Morgan de, A., Formal logic, 1847.

N

- Natorp, P.*, Die logischen Grundlagen der exakten Wiss., 1910.
— Logik, 1910.
— Vorlesungen über praktische Phil., 1925.
Neumann, J., Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zeitsch., 1927.
Nicod, J., A reduction in the number of the primitive propositions
of logic. Proc. of the Camb. Phil. Soc., 1917-1920.

O

- Ortega y Gasset, J.*, Obras completas, 1932: en particular vegi's, Kant,
Filosofia pura.
— i El tema de nuestro tiempo.

P

- Padoa, A.*, Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé
d'une introduction logique à une théorie déductive quelconque.
Bib. d. Cong. Int. d. Phil., III; 1901.
— La logique déductive dans sa dernière phase de développement, 1912.
Peano, G., Notations de logique mathématique, 1894.
— Les définitions mathématiques. Bib. d. Cong. Int. d. Phil., III; 1901.
— Formulaire des mathématiques, 1908. (Cinc volums.)
Peirce, C., On an improvement in Boole's calculus of logic. Proc. Amer.
Acad., VII; 1867.
— On the algebra of logic. Amer. J. of Math., II; 1880.
— The logic of relatives. Studies of John Hopkins University.

BIBLIOGRAFIA

- Pierce, C.*, On the algebra of logic. Amer. J. of Math., VII; 1885.
Poretzky, P., Sept lois fondamentales de la théorie des égalités logiques.
 Bull. Phys. Math. Soc. Kasan., 1898.
 — Théorie conjointe des égalités et des non-égalités. Ibid., 1908.
Post, E., Introduction to a general theory of elementary propositions.
 Amer. J. of Math., 1921.

R

- Ramsey, F.*, The foundation of mathematics, 1931.
Reichenbach, H., Kausalität und Wahrscheinlichkeit. Erkenntnis, I; 1930.
 — Über kausale und statistische Gesetzmässigkeit. Ibid.
 — Wahrscheinlichkeitslogik. Sitz. ber. d. Preuss. Ak. d. Wiss., 1932.
Rickert, H., Der Gegenstand der Erkenntnis, 1928.
Rougier, L., La structure des théories déductives, 1921.
Royce, J., Prinzipien der Logik. Enzycl. d. phil. Wiss., 1912.
Russell, B., The principles of mathematics, 1903.
 — On denoting. Mind, 1905.
 — Introduction to the mathematical Philosophy, 1918.
 — i *Whitehead, N.*, Principia Mathematica, I, II i III, 1925-1927.
 — The theory of implication. Amer. J. of Math., XXVIII; 1906.
 — Mathematical logic as based on the theorie of types. Ibid., XXX; 1908.
 — La théorie des types logiques. Rev. d. Métaph. et de Morale, 1910.
 — L'importance philosophique de la logistique. Ibid., 1911.
 — Mysticism and logic, 1921.

S

- Scholtz, H.*, Die Axiomatik der Alten. Blätter f. Phil., 1930.
 — Geschichte der Logik, 1931.
Schröder, E., Über das Zeichen, 1890.
 — Vorlesungen über die Algebra der Logik, 1890.
 — Der Operationskreis des Logikkalküls, 1877.
 — Abriss der Algebra der Logik. Ed. Müller, 1909-1910.
Sheffer, H., A set of five independent postulates for Booleans algebras.
 Trans. Amer. Math. Soc., XIV; 1913.
Shaw, J., Lectures on the philosophy on Mathematics, 1918.
Shearman, A., Definition in symbolic logic. Mind, 1910.

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

Sigwart, Chr., Logik, 1924.

Smart, H., The philosophical presuppositions of mathematical logic, 1925.

— On mathematical logic. Journal of philosophy, 1926.

T

Tarsky, A., Sur le terme primitif de la logistique. Fundamenta mathematicae, 1923.

— Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik. Compt. rend. de Varsovie, 1930.

— Fundamentale Begriffe d. Methodologie. Monatsheft. f. Math., 1930.

V

Vailati, G., La logique mathématique. Rev. d. Métaphys. et Mor., 1899.

Venn, J., Symbolic logic, 1894.

W

Weyl, H., Über die Definitionen d. math. Grundbegriffe. Math. Natw. Blätter, 1910.

— Das Kontinuum, 1918.

— Der circulus viciosus in d. heutigen Begründung d. Analysis. Jahr. Ber. d. Deut. Math. Ver., 1919.

— Über die neue Grundlagenkrise d. Math. Mat. Zeitsch., 1921.

— Die heutigen Erkenntnislage in d. Math. Symposion, 1925.

— Philosophie der Mathematik, 1926.

Whitehead, N., A Treatise of universal Algebra, 1898.

— Memoir on the algebra of symbolic logic. Amer. J. of Math., xxiii; 1901.

— The logic of relations, logical substitution groups and cardinal numbers. Ibid., xxv; 1903.

Wittgenstein, L., Tractatus logico-philosophicus, 1922.

Wundt, W., Logik, 1906.

Y

Young, J., Lectures on the fundamental concepts of algebra and geometry, 1911.

BIBLIOGRAFIA

Z

Zaremba, St., La logique des mathématiques, 1926.

Zermelo, E., Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.
Math. Ann., 1904.

Ziehen, Th., Lehrbuch der Logik, 1920.

Zindler, K., Beiträge zur Theorie d. math. Erkenntnis, 1889.

ÍNDIX

PART TERCERA

	Pags.
LÒGICA RELACIONAL.....	7
§ 31. <i>Definicions preliminars</i>	9
I. Definició de relació.....	9
II. Operacions relacionals.....	12
III. Representacions gràfiques.....	13
IV. Teoremes més importants.....	15
V. Relació universal i nul·la. Existència de relacions.....	16
§ 32. <i>Generalització de la teoria dels tipus lògics</i>	17
§ 33. <i>Funcions descriptives</i>	21
§ 34. <i>La inversa d'una relació. Relacions simètriques i asimètriques</i>	24
I. La inversa d'una relació.....	24
II. Relacions simètriques i asimètriques.....	25
§ 35. <i>Funcions pluriobjectals dins una relació</i>	26
I. Funció pluriobjectal.....	26
II. Antecedents i conseqüents d'una relació.....	27
III. Predomini, postdomini i camp d'una relació....	30
IV. Relacions amb pre-postdomini i camp limitats..	32
V. Propietats i teoremes generals sobre funcions pluriobjectals.....	35
§ 36. <i>Producte relatiu de dues relacions</i>	36
I. Definicions inicials.....	36
II. Teoremes importants.....	37
III. Classes de relacions segons les potències.....	39
§ 37. <i>Relacions triargumentals i pluriargumentals</i>	41
§ 38. <i>Classes-unitat. Identitat. Classes-parell</i>	44
I. Identitat i diversitat.....	44
II. Classes-unitat.....	46

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

	Pàgs.
III. Classes-parell.....	50
§ 39. Subclasses i relacions.....	53
I. Subclasses.....	53
II. Subrelacions.....	55
III. Les relacions dels membres d'una classe amb ella mateixa.....	55
§ 40. Les relacions uniplurivoques, pluriumivoques i biunivoques.	57
I. Definicions generals.....	57
II. Lleis especials per a $1 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow Cls$, $Cls \rightarrow 1$	59
§ 41. El principi d'abstracció relacional.....	62
§ 42. Similaritat entre les classes.....	66
§ 43. Teoria general de les seleccions.....	68
I. Seleccions dins classes.....	68
II. Seleccions dins les relacions.....	71
III. Seleccions emprant la relació ϵ	75
IV. Classes compostes amb classes mútuament exclu- sives.....	76
V. Condicions per a l'existència de seleccions i for- mulacions lògiques de l'axioma de Zermelo.	77
§ 44. Relacions inductives i hereditàries.....	79
I. Cadenes relacionals.....	79
II. Potències d'una relació.....	81
§ 45. Anàlisi general d'una relació.....	83
I. Elements inicials.....	83
II. Mínims i màxims.....	84
III. Descendència i família.....	85
§ 46. Transformacions internes d'una relació.....	86

PART QUARTA

CONSTRUCCIÓ LÒGICA D'ALGUNS CONCEPTES MATEMÀTICS.....	89
§ 47. Nombre cardinal.....	91
I. Definició general.....	91
II. Definicions de 0, 1, 2.....	94
III. Les relacions de menor i major que.....	96
IV. Nombres cardinals inductius.....	97
V. Cardinals finits i infinits. Classes reflexives.....	98
§ 48. Progressions i axiomàtica de Peano. Transfinites de Cantor.	104

ÍNDIX

	Pàgs.
I. Progressions. Definició.....	104
II. El primer transfinit cardinal de Cantor.....	106
§ 49. Nombres relacionals.....	107
§ 50. Relacions connexes i sèries.....	109
I. Relació connexa.....	109
II. Sèries.....	110
III. Punts màxims i mínims dins una classe.....	111
IV. Punts següents.....	112
§ 51. Concepte logístic de límit.....	113
I. Límits.....	113
II. Relació dedekindiana.....	114
III. Derivades.....	115
IV. Relació densa.....	115
§ 52. Convergència. Continuïtat. Límits de funcions:.....	116
I. Convergència.....	116
II. Seccions limitadores. Oscil·lacions d'una funció.....	117
III. Límits de les funcions.....	121
§ 53. Continuïtat de les funcions.....	121
I. Continuïtat.....	121
II. Continuïtat dedekindiana i cantoriana.....	122
§ 54. Sèries ben ordenades i nombres ordinals.....	123
I. Sèrie ben ordenada.....	123
II. Nombres ordinals.....	124
III. Relació hereditària transfinita. Inducció transfinita.....	125
IV. Teorema de Zermelo.....	127
V. Sèries compactes.....	127
VI. Sèries racionals.....	128
VII. Definició lògica de grup.....	128

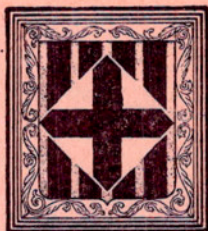
PART CINQUENA

VALORACIÓ FILOSÒFICA DE LA LOGÍSTICA.....	131
§ 55. Teoria general de l'axiomàtica.....	133
I. Axiomes-teoremes. Conceptes primitius i derivats.....	133
II. Interpretacions d'un sistema d'axiomes.....	134
III. Propietats lògiques d'un sistema qualsevol d'axiomes.....	136

INTRODUCCIÓ A LA LOGÍSTICA

	Pàgs.
§ 56. <i>Tractament formalístic de la logística</i>	141
§ 57. <i>Lògiques no-aristotèliques</i>	151
I. La lògica intuicionista.....	151
II. Lògiques de la possibilitat.....	153
§ 58. <i>Les antinòmies lògiques i llur solució</i>	157
§ 59. <i>Col·locació de la logística dins el sistema lògic total</i>	161
I. Les tres funcions del judici : Sintètica, categorial i objectal.....	161
II. La logística i les lògiques correlatives de caire kantia.....	163
III. La logística i les lògiques polars.....	172
IV. Valoració filosòfica final de la logística.....	177
BIBLIOGRAFIA.....	183

INSTITUT
D'ESTUDIS
CATALANS



PALAU DE LA
GENERALITAT
BARCELONA

Publicacions de

l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

Representants : a FRANÇA : A. Picard, 82, Rue Bonaparte, Paris (VI); a ALEMANYA : Otto Harrassowitz, Leipzig; a ANGLATERRA : Dulau & Co., 37, Soho Square, Londres.

Miscel·lània Prat de la Riba, recull d'escrits en homenatge al fundador de l'Institut d'Estudis Catalans.
Vol. I. — PERE COROMINES : La sobirania de les persones polítiques. — J. PUIG I CADAFAIX : El problema de la transformació de la catedral del Nord importada a Catalunya. Contribució a l'estudi de l'arquitectura gòtica meridional. — EDUARD FONTSERÈ : Distribució altimètrica de les humitats mitjanes des del port de Barcelona a la muntanya. — AUGUST PI SUÑER : Els reflexos tròfics glucemiant. — LLUÍS NICOLAU D'OLIVER : Píndar-Teòcrit. Manuscrit de la Biblioteca de Catalunya. — PERE BARNILS : Comentaris fonètics : Idees i realitats. — LLONGÍ NAVAS, S. J. : Varietat nova d'Ascalaf (Neurópter), dedicat a En Prat de la Riba. — JOAQUIM RUYRA : L'educació de la inventiva. — A. GRIERA : Català «Poll». — A. RUBIÓ I LLUCH : La Companyia Catalana sota el comandament de Teobald de Cepoy. Campanyes de Macedònia i Tessàlia (1307-1310). — LOUIS GAUCHAT : Leben und Sprache. — MIQUEL COSTA I LLOBERA, Pvre : Himne de l'Epifania. — RAMON D'ALÒS-MONER : De la marmessoria d'Arnau de Vilanova. — FERRAN DE SAGARRA : Assassinat de D. Antoni de Fluvià i de Torrelles, i homicidis, robatoris i saqueig del castell i terme de Palautordera (episodi de l'any 1640). — J. MASSÓ TORRENTS : La cançó provençal en la literatura catalana..... 20 Ptes.

Vol. II (*En preparació*).

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS : Vint-i-cinc anys d'actuació. (*En premsa.*)

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS : Discursos inaugurals. (*En premsa.*)

MANUEL DE MONTOLIU : Aribau i la Catalunya del seu temps. (*En premsa.*)

SECCIÓ DE CIÈNCIES

	Ptes.		Ptes.
Treballs del Servei Tècnic del Paludisme (1915-1916)..... (<i>Exhaurits</i> .)		Any III, fasc. I, II i III.... Cada un	4
		» IV, fasc. I a IX.....	2
		» V, fasc. I a VI.....	2
Treballs de la Societat de Biologia , publicats sota la direcció d'A. PI i SUÑER. Volums I a XV. (Any 1913, 1915, 1917, 1918, 1919, 1920-21, 1922, 1923-24, 1925-27, 1928-29, 1930-31, 1932 i 1933)..... Cada un	20	» VI, fasc. I, II-V i VI-IX.	3
		» VII, fasc. únic.....	4
		» VIII, fasc. únic.....	4
		» IX... (<i>En preparació</i> .)	
Vols. II i IV..... (<i>Exhaurits</i> .)		» X, fasc. únic.....	4
Vol. XVI..... (<i>En premsa</i> .)		» XI, fasc. únic.....	4
		» XII, fasc. primer.....	4
Arxius.		Monografia mundial de l'ordre dels Rafidòp- ters (Ins) , pel P. LLONGÍ NAVAS, S. J....	
Any I, fasc. I (<i>exh.</i>), II i III.. Cada un	4	(<i>Exhaurida</i> .)	
» II, fasc. I, II i III.....	4		

	Ptes.
Col·lecció de cursos de Física i Matemàtica, dirigida per E. TERRADAS.	
Vol. I. — E. TERRADAS, <i>Els elements discrets de la matèria i la radiació</i>	3
Vol. II. — J. REY PASTOR, <i>Teoria de la representació conforme</i>	3
Vol. III. — J. HADAMARD, <i>Poincaré i la teoria de les equacions diferencials</i>	3
Vol. IV. — J. PALÀCIOS, <i>Propietats dels gasos ultraenraris</i>	3
Vol. V. — LEVI CIVITA, <i>Qüestions de Mecànica clàssica i relativista</i>	3
Vol. VI. — F. SEVERI, <i>Sobre funcions de dues variables complexes</i>	5
Vol. VII. — H. DULAC, <i>Cycles limites.</i> (<i>En premsa.</i>)	
Biblioteca Filosòfica, dirigida per PERE COROMINES.	
Vol. I. — <i>Vives a Anglaterra</i> , per FORSTER WATSON.....	10
Vol. II. — <i>La Natura i la Història</i> , per P. DORADO MONTERO.....	6
Vol. III. — <i>Introducció a la Logística</i> , per DAVID GARCIA.	
Vol. I.....	25
» II.....	25
Anuari de la Societat Catalana de Filosofia. Any I (1923).....	20
FLORA I FAUNA DE CATALUNYA dirigides per JOSEP M. ^a BOFILL I PICHOT	
Flora de Catalunya , per J. CADEVALL.	
Vol. I.....	40
» II.....	40
» III.....	40
» IV, a despeses de la Institució Patxot	40
» V.....	40
» VI..... (<i>En premsa.</i>)	
Malacologia , per M. CHIA.	
Fasc. I i II..... Cada un	5
» III.....	1
Entomologia.	
Dípters. Fasc. I, per J. ARIAS ENCOBET.	5
Coleòpters. <i>G. Carabus.</i> Fasc. I, per A. CODINA.....	7
Hemípters , per A. CODINA.....	7
Neuròpters , pel P. LLONGÍ NAVÀS, S. J. Fasc. I. <i>Monografia general de Catalunya</i>	7
Fasc. II. — <i>Mecòpters</i>	3
Fasc. III. — <i>Rafidiòpters</i>	7
Treballs de la Institució Catalana d'Història Natural.	
Vol. I a VI. (Anys 1915, 1916, 1917, 1918, 1919-20 i 1921-22)..... Cada un	15

	Ptes.
SERVEI METEOROLÒGIC DE CATALUNYA	
Notes d'estudi , dirigides per E. FONTSERÉ, Fasc. I a LVI..... Cada un	2
Vols. I (1921-23). 1. JOAQUIM FEBRER : <i>Pluges a Catalunya durant l'estiu del 1921.</i> — 2. RAMON JARDÍ : <i>Un pluviògraf d'intensitat.</i> — 3. MANUEL ALVAREZ CASTRILLON : <i>Freqüència de les direccions del vent a Barcelona.</i> — 4. JOAQUIM FEBRER : <i>Pluges a Catalunya durant la tardor del 1921.</i> — 5. RAFAEL PATXOT I JUBERT : <i>Contribució a l'estudi dels corrents atmosfèrics mitgers.</i> — 6. GABRIEL CAMPO : <i>Relació entre els halos i les pluges ciclòniques a Catalunya.</i> — 7. JOSEP ESTALELLA : <i>Les denominacions del vent a la costa de Llevant.</i> — 8. JOAQUIM FEBRER : <i>Pluges a Catalunya durant l'hivern de 1921-22.</i> — 9. JOAQUIM FEBRER : <i>Pluges a Catalunya durant l'any meteorològic de 1920-21.</i> — 10. MANUEL ALVAREZ CASTRILLON : <i>Recurrència de l'estat higromètric a l'Observatori Fabra.</i> — 11. JOAQUIM FEBRER : <i>Pluges a Catalunya durant la primavera del 1922.</i> — 12. ANTONI QUIXAL : <i>Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, des del 19 de setembre del 1921 al 30 de setembre del 1922.</i> — 13. MAURICI HERNÁNDEZ : <i>Les temperatures màximes i mínimes a Mahó.</i> — 14. EDUARD FONTSERÉ : <i>Sondatges de l'atmosfera lliure, amb globus pilots, durant els anys 1916, 1917 i 1918.</i> — 15. JOAQUIM FEBRER : <i>Pluges a Catalunya durant l'estiu de 1922.</i> — 16. JOAQUIM FEBRER : <i>Pluges a Catalunya durant la tardor del 1922 i l'any meteorològic 1921-22.</i> — 17. MANUEL ALVAREZ CASTRILLON : <i>Temperatures normals a l'Observatori Fabra, deduïdes de vuit anys d'observacions (1914-21).</i> — 18. JOSEP ANGLADA : <i>Instruccions per a la recepció dels radiogrames meteorològics del matí.</i> — 19. EDUARD FONTSERÉ : <i>Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, durant els anys 1919 a 1920.</i> — 20. RAMON JARDÍ : <i>Deu anys d'observacions termoplüviomètriques a Tivissa.</i> — 21. GABRIEL CAMPO : <i>Sobre el període de seca de l'hivern de 1922-23 a Catalunya.</i> — 22. ANTONI QUIXAL : <i>Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, des del 1.^r d'octubre al 31 de desembre del 1922.</i> — 23. JOAQUIM FEBRER : <i>Pluges a Catalunya durant l'hivern de 1922-33.</i>	

Vol. II (1923-1927). 24. JOAQUIM FEBRER:

Pluges a Catalunya durant la primavera del 1923. — 25. ANTONI QUIXAL : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, des del 1.^r de gener al 30 de juny del 1923. — 26. RAFAEL PATXOT I JUBERT : Segon estudi horari de la pluja a Sant Feliu de Guíxols. Observacions del març del 1896 al juny del 1923. — 27. JOAQUIM FEBRER : Observacions pluviomètriques de la Xarxa Catalana, corresponents als anys 1911, 1912, 1913, 1918, 1919 i 1920. — 28. JOSEP ANGLADA : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots, des del 1.^r de juliol al 31 de desembre del 1923. — 29. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'estiu i la tardor del 1923 i l'any meteorològic 1922-23. — 30. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'hivern de 1923-24 i la primavera del 1924. — 31. JOSEP ANGLADA : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona, amb globus pilots, des del 1.^r de gener al 30 de juny de 1924. — 32. JOAQUIM FEBRER : Lluviàs en Catalunya durant el verano y el otoño de 1924 y el año meteorológico 1923-1924. — 33. GABRIEL CAMPO : Sondeos de la atmósfera libre en Barcelona, con globos pilotos, desde el 1.^o de julio de 1924 al 31 de diciembre de 1925. — 34. JOAQUIM FEBRER : Lluviàs en Catalunya durant el año meteorológico comprendido entre el 1.^o de diciembre de 1924 y el 30 de noviembre de 1925. — 35. JOAQUIM FEBRER : Lluviàs en Catalunya durant el año meteorológico comprendido entre el 1.^o de diciembre de 1925 y el 30 de noviembre de 1926. — 36. GABRIEL CAMPO : Sondeos de la atmósfera libre en Barcelona, con globos pilotos, durante el año 1926.

Vol. III (1928-1931). 37. JOAQUIM FEBRER:

Lluviàs en Catalunya durant el año meteorológico comprendido entre el 1.^o de diciembre de 1926 y el 30 de noviembre de 1927. — 38. GABRIEL CAMPO : Sondeos de la atmósfera libre en Barcelona con globos pilotos, durante el año 1927. — 39. MANUEL ALVAREZ CASTRILLÓN : Algunos climogramas de la zona costera catalana. — 40. JOAQUIM FEBRER : Lluviàs en Catalunya durant el año meteorológico comprendido entre el 1.^o de diciembre de 1927 y el 30 de noviembre de 1928. — 41. EDUARDO FONTSERÉ : Los «Llevant» de la costa catalana. — 42. GABRIEL CAMPO : Sondeos de la atmósfera libre en Barcelona con globos

pilotos, durante el año 1928. — 43. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'any comprès entre el 1.^r de desembre del 1928 i el 30 de novembre del 1929. — 44. GABRIEL CAMPO : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots, durant l'any 1929. — 45. JOAQUIM FEBRER : Assaig sobre el clima de Caldes de Montbui. — 46. GABRIEL CAMPO : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots durant l'any 1930. — 47. JOSEP VIA RAVENTÓS : Assaig sobre el clima de l'Aldea en el terme de Tortosa. — 48. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'any meteorològic comprès entre el 1.^r de desembre del 1929 i el 30 de novembre del 1930.

Vol. IV (1932-1934). 49. EDUARDO FONT-

SERÉ : Condiciones climatológicas de les costes occidentals de la Mediterrània i en particular de les terres costeres catalanes. — 50. FRANCESC PARDILLO : Les pluges de pols del 30 d'octubre del 1926 i del 27 de novembre del 1930 a Catalunya. I. Estudi minerològic. — 51. EDUARDO FONTSERÉ : Freqüència de les glaçades a Catalunya. — 52. GABRIEL CAMPO : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots durant l'any 1931. — 53. JOAQUIM FEBRER : Pluges a Catalunya durant l'any meteorològic comprès entre el 1.^r de desembre del 1930 i el 30 de novembre del 1931. — 54. GABRIEL CAMPO : Resum de disset anys de sondatges a Barcelona amb globus pilots (1914 a 1930). — 55. JOSEP ANGLADA : Assaig d'una nova forma d'historial termomètric, de possible aplicació als problemes sanitaris (anys 1922-23). — 56. ARNAU GABELLIERI : Pluges a Catalunya durant l'any meteorològic comprès entre el 1.^r de desembre del 1931 i el 30 de novembre del 1932. — 57. GABRIEL CAMPO : Sondatges de l'atmosfera lliure a Barcelona amb globus pilots (anys 1932 i 1933).

Treballs de l'Estació Aerològica de Barcelona, per E. FONTSERÉ.

Vol. I, 1914..... 4
» II..... (Exhaurit.)

MEMÒRIES PUBLICADES A DESPESES
DE LA INSTITUCIÓ PATXOT

Vol. I:

Fasc. I. — M. ALVAREZ CASTRILLÓN, Microsismes observats a Barcelona durant els anys 1915 i 1916..... 4

	Ptes.
Fasc. II. — R. JARDÍ, Estudis de la intensitat de la pluja a Barcelona	3
SOCIETAT CATALANA DE CIÈNCIES FÍSQUES, QUÍMIQUES I MATEMÀTIQUES	
Memòries, Vol. I (1932-33):	
Fasc. I. — M. MASRIERA I RÚBIO, Concordància de la termodinàmica i la cinètica en la isòcora de reacció	4
Fasc. II. — J. BALTÀ ELIAS, Les radiopertorbacions naturals (atmosfèriques) en meteorologia	4
Fasc. III. — C. PI-SUNER BAYO, El complex vitamínic B	4

	Ptes.
Fasc. IV. — DAVID GARCIA, Assaigs moderns per a la fonamentació de les matemàtiques	4
Fasc. V. — EDUARD FONTSERÈ, Les estacions meteorològiques de muntanya fundades per la Generalitat amb motiu de l'Any Polar 1932-1933	4
Fasc. VI. — M. FAURA I SANS, Expedició científica per la Fenoscàndia (Suècia, Noruega, Finlàndia i Rússia) i regions circumpolar nòrdiques, realitzada durant l'estiu del 1931 ..	6
Vol. II.	
Fasc. I. — B. BASSEGODA MUSTÉ, Matemàtiques i Arquitectura	4
Fasc. II. — ED. FERRER, L'alumini i els seus aliatges	4

SECCIÓ HISTÒRICO-ARQUEOLÒGICA

	Ptes.
Anuaris de l'Institut d'Estudis Catalans.	
Anuaris MCMVII-MCMXX. Vols. I a VI (VI <i>exhaurit</i>).....	60
Vol. VII (MCMXXI-MCMXXVI).....	50
» VIII. MCMXXVII-MCMXXXI. (<i>En premsa</i> .)	
Les Pintures murals catalanes.	
Fasc. I-IV..... (<i>Exhaurits</i> .)	
» V. — Sant Sadurní d'Ossormort, Sant Martí Ses-Corts i El Brull. (<i>En premsa</i> .)	
Les monedes catalanes, per JOAQUIM BOTET i SISÓ.	
Vol. I-III..... (<i>Exhaurits</i> .)	
L'Arquitectura romànica a Catalunya, per JOSEP PUIG i CADAFALECH, A. DE FALGUERA i J. GODAY.	
Vol. I. — Precedents : L'Arquitectura romana; l'Arquitectura cristiana pre-romànica..... (<i>Exhaurit</i> .)	
Vol. II. — Des del segle IX a les darreries del segle XI.....	50
Vol. III i darrer. — Els segles XII i XIII. (<i>Exhaurit</i> .)	
Documents per la Història de la Cultura catalana mig-aval, publicats per A. RUBIÓ i LLUCH.	
Vol. I..... (<i>Exhaurit</i> .)	
» II i darrer.....	25

	Ptes.
Itinerari de Jaume I el Conqueridor, per JOAQUIM MIRET I SANS (<i>Exhaurit</i> .)	
Les Obres d'Auziàs March. Edició crítica en dos volums, en vista de tots els manuscrits i totes les edicions, per AMADEU PAGÈS ..	24
Edició de 40 exemplars en paper de fil.	50
Repertori de l'antiga literatura catalana, per JAUME MASSÓ i TORRENTS.	
<i>La Poesia</i> . Vol. I (publicat a despeses del Sr. Francesc Cambó).....	45
Diplomatari de l'Orient Català, per A. RUBIÓ i LLUCH (<i>En premsa</i> .)	
L'Arquitectura romana a Catalunya, per J. PUIG i CADAFALECH. Reedició ampliada del vol. I de l'Arquitectura romànica a Catalunya, de J. Puig i Cadafalch, A. de Falguera i J. Goday, part primera	
	50
L'Arquitectura pre-romànica a Catalunya, per J. PUIG i CADAFALECH. Reedició ampliada del vol. I, llibre II, de l'Arquitectura romànica a Catalunya, de J. Puig i Cadafalch, A. de Falguera i J. Goday. (<i>En preparació</i> .)	
Dietari de la Generalitat de Catalunya. (<i>En premsa</i> .)	
Cartulari vell de Poblet. (<i>En preparació</i> .)	
ESTUDIS DE BIBLIOGRAFIA LUL·LIANA	
I. — L'Edició maguntina de Ramon Llull, pel Dr. A. GOTTRON	5

	Ptes.		Ptes.
II. — Bibliografia de les impressions lul·lianes , per ELIAS ROSENT i ESTANISLAU DURAN.	25	Fasc. IV. — J. DE C. SERRA-RÀFOLS, Forma Conventus Tarraconensis , I. Baetulo-Blanda	8
FUNDACIÓ CONCEPCIÓ RABELL CIBILS • VÍDUA ROMAGUERA		Fasc. V. — Leges Palatinae Jacobi II regis Maioricarum , pel DR. WILLEMSSEN. (<i>En premsa.</i>)	
Gesta comitum Barcinonensium . Textos llatí i català, per L. BARRAU-DIHIGO i J. MASSÓ i TORRENTS.....	25	Vol. II (publicat a despeses de la Insti- tució Patxot):	
Dietari del Capellà d'Alfons el Magnànim , pu- blicat i anotat per F. MARTORELL i TRA- BAL..... (<i>En premsa.</i>)		R. D'ABADAL i VINYALS, Els diplomes carol- lingis a Catalunya (<i>En premsa.</i>)	
B. DESCLOT : Crònica . Editada i anotada en col·laboració amb FERRAN SOLDEVILA, per JORDI RUBIÓ..... (<i>En premsa.</i>)		Vol. III (publicat a despeses de la Ins- titució Patxot):	
Libre dels Feys de Jaume I , editat per MA- NUEL DE MONTOLIU, P. Marsili liber actuum domini regis Jacobi , editat per XAVIER DE SALAS i ENRIC BAGUÉ. Anotació de FER- RAN SOLDEVILA..... (<i>En premsa.</i>)		J. PUIG i CADAVALCH, La Geografia i els ori- gens del primer art romànic	100
MEMÒRIES		Vol. IV:	
Vol. I (Publicat a despeses de la Insti- tució Patxot):		A. RUBIÓ i LLUCH, La població de la Grècia catalana en el segle XIV	4
Fasc. I. — PERE PUJOL, L'urna d'argent de sant Ermengol, bisbe d'Urgell	4	Vol. V:	
Fasc. II. — A. RUBIÓ i LLUCH, Paquimeres i Muntaner	2	JOAN BERGÓS, L'escultura a la Seu vella de Lleida (<i>En premsa.</i>)	
Fasc. III. — J. MILLÀS i VALLICROSA, Docu- ments hebraics de jueus catalans	15	Vol. VI:	
		MANUEL TRENS, Ferrer Bassa i les pintures de Pedralbes (<i>En premsa.</i>)	
		Vol. VII:	
		FRANCESC PRAT, Descripció i estudi d'un aqueducte romà descobert a Pineda . (<i>En preparació.</i>)	

SECCIÓ FILOLÒGICA

	Ptes.		Ptes.
Himnes Homèrics . Traducció en vers de JOAN MARAGALL, i text grec amb la traducció literal de P. BOSCH GIMPERA. (<i>Exhaurit.</i>)		El Càntic dels Càntics . Versió de l'hebreu, per Mn. FREDERIC CLASCAR.....	3
El Gènesi , versió de l'hebreu segons els tex- tos originals, i amb anotació, de Mn. FRE- DERIC CLASCAR.....	5	Els IV llibres de les Geòrgiques , de Publi Vir- gili Maró, traducció en vers per Mn. LLO- RENÇ RIBER.....	6
Edició en paper de fil.....	20	L'Èxode , versió de l'hebreu, per Mn. FREDE- RIC CLASCAR.....	8
Museu : Hero i Leandre . Text grec amb la ver- sió literal en prosa de L. SAGALÀ i en he- xàmetres d'AMBROSI CARRION, duent en apèndix les traduccions inèdites, en vers, de P. BERTRAN i BROS i J. M. PELLICER i PAGÈS..... (<i>Exhaurit.</i>)		Exposició de l'Ortografia Catalana , extret del Diccionari Ortogràfic de l'Institut d'Estu- dis Catalans.....	0'50
Mireia . Poema provençal de FREDERIC MIS- TRAL. Traducció catalana de MARIA ANTÒ- NIA SALVÀ..... (<i>Exhaurit.</i>)		Butlletí de Dialectologia Catalana (publicació semestral des de 1913).	
Tercera edició..... (<i>En premsa.</i>)		Vol. I (abril-desembre 1913).....	3
		• II (gener-juny 1914).....	1'50
		• II (juliol-desembre 1914).....	2
		• III (gener-juny 1915).....	2'50
		• III (juliol-desem. 1915). (<i>Exhaurit.</i>)	

	Ptes.		Ptes.
Vol. IV (gener-juny 1916). (<i>Exhaurit.</i>)		VIII. — Diccionari de rims, de Jaume March, editat per A. GRIERA.....	10
» IV (juliol-desembre 1916).....	3	IX. — Estudis romànics (Llengua i Literatura), vol. II.....	12
» V (gener-desembre 1917).....	4	X. — La versione catalana dell'Inchiesta del San Graal, secondo il Codice dell'Ambrosiana di Milano I. 79 sup., pubblicata da VINCENZO CRESCINI e VENANZIO TODESCO.	10
» VI (gener-juny 1918).....	2'50	XI. — Diccionari ortogràfic, redactat sota la direcció de P. FABRA, president de la Secció Filològica (tercera edició).	
» VII (gener-desembre 1919).....	5	(<i>Exhaurit.</i>)	
» VIII (gener-desembre 1920).....	5	XII. — Gramàtica Catalana, per POMPEU FABRA (setena edició).....	3'50
» IX (gener-desembre 1921).....	5	XIII. — Bibliographie élémentaire de l'ancien provençal, par J. ANGLADE. — L'article majorquin et l'article roman dérivé de «ipse», par P. ROKSETH. — Les vocals tòniques del rossellonès, per P. BARNILS. — El llenguatge com a fet estètic i com a fet lògic, per M. DE MONTOLIU.....	10
» X (gener-desembre 1922).....	10	XIV. — Epistolari d'En Milà i Fontanals, correspondència recollida i anotada per LLUÍS NICOLAU D'OLWER, vol. I.....	10
» XI (gener-juny 1923).....	5	Id., vol. II.....	15
» XII (juliol-desembre 1923).....	5	XV. — La Culture des Céréales a Majorque, par P. ROKSETH.....	10
» XIII (gener-desembre 1924).....	10	XVI. — Notes linguistiques sur l'argot barcelonais, par M. L. WAGNER.....	10
» XIV (gener-desembre 1926).....	5	Atlas lingüístic de Catalunya, per A. GRIERA, vols. I a IV..... Cada un	75
» XV (gener-desembre 1927).....	5	Edició en paper de fil.....	150
» XVI (gener-desembre 1928).....	5	Id., vol. V..... (<i>En premsa.</i>)	
» XVII (gener-desembre 1929).....	10		
» XVIII (gener-desembre 1930).....	20		
» XIX (gener-desembre 1931).....	20		
» XX (gener-desembre 1932).....	20		
» XXI..... (<i>En premsa.</i>)			
» XXII (gener-desembre 1934).....	20		
BIBLIOTECA FILOLÒGICA			
I. — Documents en vulgar per a l'estudi de la llengua (segles XI, XII i XIII), per Mn. PERE PUJOL..... (<i>Exhaurit.</i>)			
II. — Die Mundart von Alacant. — Beitrag zur Kenntnis des Valencianischen, von Dr. PERE BARNILS.....	4		
III. — Diccionari Aguiló.			
En rústica:			
Fasc. I a X (III, IV i V <i>exhaurits</i>). Cada un.	4		
Vols. V, VI i VII.....	10		
Relligats:			
Vols. V, VI, VII i VIII..... Cada un	15		
En paper de fil. Vols. I a VIII.	30		
Bibliografia del diccionari Aguiló.			
(<i>En premsa.</i>)			
IV. — La frontera catalano aragonesa, per ANTONI GRIERA. Fasc. I..... (<i>Exhaurit.</i>)			
V. — Textes catalans avec leur transcription phonétique, précédés d'un aperçu sur les sons du catalan, per J. ARTEAGA PEREIRA, ordenats per P. BARNILS.....	4		
VI. — Estudis romànics. (Llengua i Literatura), vol. I.....	8		
VII. — Vocabulari català-alemany, de l'any 1502, edició facsímil segons l'únic exemplar conegut, acompanyada de la transcripció, d'un estudi preliminar i de registres alfabètics, per P. BARNILS.....	12		
		MEMÒRIES PUBLICADES	
		A DESPESES DE LA INSTITUCIÓ PATXOT	
		Vol. I:	
		Fasc. I. — POMPEU FABRA, La coordinació i la subordinació en els documents de la Cancilleria catalana durant el segle XIV.....	2
		Fasc. II. — JOSEPH ANGLADE, Les Flors del Gay Saber.....	8
		Fasc. III. — PAUL AEBISCHER, Études de Toponymie Catalane.....	11
		LABORATORI DE FONÈTICA	
		Estudis fonètics. — I.....	20
		En dipòsit:	
		Primer Congrés Internacional de la Llengua Catalana. Barcelona, 1908.....	5

BIBLIOTECA DE CATALUNYA

	Ptes.
Butlletí de la Biblioteca de Catalunya.	
Any I, 1914, n.º 1 (gener-abril).....	1'50
» n.º 2 (maig-agost).....	3
» n.º 3 (setembre-desembre).....	1'50
» II, 1915, n.º 4 (gener-agost).....	4
» n.º 5 (setembre-desembre).....	2
» III, 1916, n.º 6 (gener-desembre).....	5
» IV, 1917, n.º 7 (gener-desembre).....	10
» V, 1918-1919, n.º 8.....	20
» VI, 1920-1922, n.º 9.....	30
» VII, 1923-1927.....	30
» VIII..... (En premsa.)	

Butlletí d'adquisicions.

Any 1918..... (Exhaurit.)	
Anys 1919 a 1922..... Cada un	0'50

B. C. Aribau. La Pàtria. Trobes. Facsimil de l'autògraf de l'autor i d'una carta acompanyatòria a F. Renart i Arús, amb un comentari de Carles Riba. Barcelona, 1933.

Edició de 150 exemplars, dels quals solament 50 han estat posats a la venda. 75

Catàleg de la Col·lecció Cervàntica Bonsoms, per JOAN GIVANEL I MAS.

Vol. I (1590-1800).....	20
Edició de 40 exemplars numerats en paper de fil.....	40
Vol. II (1801-1879).....	30
Edició de 40 exemplars numerats en paper de fil.....	50
Vol. III (1880-1915).....	40
Edició de 40 exemplars numerats en paper de fil.....	60

Publicacions del Departament de Música de la Biblioteca de Catalunya.

Vol. I. — Els Madrigals i la Missa de Difunts d'En Brudieu. Transcripció i notes històriques i crítiques per FELIP PEDRELL i Mn. HIGINI ANGLÈS, prev. 20	
Vol. II. — Catàleg dels manuscrits musicals de la Col·lecció Pedrell, per mossèn HIGINI ANGLÈS..... (Exhaurit.)	

	Ptes.
Vol. III. — Iohannis Pujol (1573-1626). In alma Cathedrali Barcinonensi cantus Magistri Opera Omnia nunc primum in lucem edita cura et studio HIGINI ANGLÈS, pbri. Vol. I : In festo Beati Georgii.....	20
Vol. IV. — Musici organici Iohannis Cabanilles (1644-1712). Opera Omnia nunc in lucem edita cura et studio HIGINI ANGLÈS, pbri. Vol. I.....	20
Vol. V. — El Canto Mozárabe. Estudio histórico-crítico de su antigüedad y estado actual, por CASIANO ROJO y GERMAN PRADO, monjes de Silos, O. S. B.....	15
Vol. VI. — El còdex polifònic de Las Huelgas (Burgos) dels segles XIII-XIV. Facsimil, transcripció i estudi per mossèn HIGINI ANGLÈS, 3 vols.....	300
Vol. VII. — Iohannis Pujol (1573-1626) Opera Omnia... cura et studio HIGINI ANGLÈS, vol. II.....	20
Vol. VIII. — Musici organici Iohannis Cabanilles (1644-1712). Opera Omnia nunc in lucem edita cura et studio HIGINI ANGLÈS, pbri. Vol. II.....	20
Vol. IX. — Antoni Soler (1729-1783). Sis quintets per a instruments d'arc i orgue o clave obligat. Transcripció i revisió per ROBERT GERHARD. Introducció i estudi d'HIGINI ANGLÈS, prev....	30
Vol. X. — La Música a Catalunya fins al s. XIII, per H. ANGLÈS, prev. (En premsa.)	
Vol. XI. — Celos aun del aire matan. Opera del siglo XVII. Texto de Calderón y música de Juan Hidalgo, por JOSÉ SUBIRÁ.....	10
Vol. XII. — El "Villancico" i la Cantata del segle XVIII a València, per VICENÇ RIPOLLÈS, prev..... (En premsa.)	

En dipòsit:

Catàleg de la Biblioteca musical de la Diputació de Barcelona, per FELIP PEDRELL (2 vols.).....	65
---	----

Barcelona, març del 1935

